

# Adaptive Simulation idealisierter Wirbelsturm-Probleme

Diplomarbeit  
von

**Teresa Beck**

An der Fakultät für Physik  
Institut für Meteorologie und Klimaforschung

|                                  |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|
| Erstgutachter:                   | Prof. Dr. Sarah Jones         |
| Zweitgutachter:                  | Prof. Dr. Klaus Dieter Beheng |
| Betreuender Mitarbeiter:         | Dr. Leonhard Scheck           |
| Zweiter betreuender Mitarbeiter: | Dr. Martin Baumann            |

Bearbeitungszeit: 01. August 2011 – 26. Juli 2012



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Modellgleichungen</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Cauchy-Gleichung . . . . .   | 5         |
| 2.2      | Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .                                | 7         |
| 2.3      | Flachwassergleichungen . . . . .                                   | 7         |
| <b>3</b> | <b>Finite-Elemente-Methode (FEM)</b>                               | <b>11</b> |
| 3.1      | FEM für elliptische Differentialgleichungen . . . . .              | 11        |
| 3.1.1    | Variationsformulierung . . . . .                                   | 11        |
| 3.1.2    | Galerkin-Methode . . . . .   | 13        |
| 3.1.3    | Finite Elemente . . . . .  | 14        |
| 3.1.4    | Adaptierte Gitter und Fehler der Finiten Elemente Lösung . . . . . | 15        |
| <b>4</b> | <b>HiFlow</b>  | <b>17</b> |
| 4.1      | Variationsformulierung der Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .     | 17        |
| 4.2      | Diskretisierung des kontinuierlichen Problems . . . . .            | 19        |
| 4.2.1    | Diskretisierung des Gebiets . . . . .                              | 19        |
| 4.2.2    | Diskretisierung der Zeit . . . . .                                 | 19        |
| <b>5</b> | <b>StormFlash</b>  | <b>23</b> |
| 5.1      | Variationsformulierung der Flachwassergleichungen . . . . .        | 23        |
| 5.2      | Diskretisierung des kontinuierlichen Problems . . . . .            | 24        |
| 5.2.1    | Riemann-Problem . . . . .  | 25        |
| 5.2.2    | Numerischer Fluss . . . . .  | 26        |
| 5.2.3    | Der numerische Fluss nach Rusanov . . . . .                        | 27        |
| 5.2.4    | Diskretisierung des Gebiets . . . . .                              | 28        |
| 5.2.5    | Diskretisierung der Zeit . . . . .                                 | 28        |
| <b>6</b> | <b>Gegenüberstellung HiFlow und StormFlash</b>                     | <b>31</b> |
| 6.1      | Anfangswerte . . . . .   | 31        |
| 6.2      | Randwerte . . . . .  | 34        |
| 6.3      | Finite Elemente . . . . .  | 36        |
| 6.4      | Stabilität . . . . .   | 37        |
| 6.4.1    | Numerische Dissipation . . . . .                                   | 37        |
| 6.4.2    | Gitterauflösung . . . . .  | 37        |
| 6.4.3    | Zeitschrittweite . . . . .   | 37        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>7</b>  | <b>Numerische Tests I</b>                                   | <b>39</b> |
| 7.1       | Modell-Szenario: Sturm vs. Gittergradient . . . . .         | 40        |
| 7.2       | Änderung der Zugbahn . . . . .                              | 42        |
| 7.2.1     | Bewegung entlang einer Grenze – Szenario 1 . . . . .        | 43        |
| 7.2.2     | Bewegung vom feinen ins grobe Gitter – Szenario 2 . . . . . | 45        |
| 7.2.3     | Bewegung vom groben ins feine Gitter – Szenario 3 . . . . . | 50        |
| 7.3       | Änderung der Intensität . . . . .                           | 51        |
| 7.4       | Fazit . . . . .   | 54        |
| <b>8</b>  | <b>Adaptivität</b>  | <b>57</b> |
| 8.1       | Adaptions-Kriterien . . . . .                               | 58        |
| 8.1.1     | Physikalisch motivierte Adaptivität . . . . .               | 58        |
| 8.1.2     | Mathematisch motivierte Adaptivität . . . . .               | 60        |
| 8.1.2.1   | A posteriori Fehlerschätzer . . . . .                       | 60        |
| 8.1.2.2   | Zielorientierte Adaptivität . . . . .                       | 63        |
| 8.2       | Adaptions-Strategien . . . . .                              | 66        |
| 8.2.1     | 1-Irregularität des Gitters . . . . .                       | 68        |
| 8.2.2     | Fixed Mesh-Fraction Strategy . . . . .                      | 68        |
| 8.3       | Aufwand und Mehrwert . . . . .                              | 69        |
| 8.3.1     | Komplexität . . . . .                                       | 70        |
| 8.3.2     | Rechenaufwand und Speicherbedarf . . . . .                  | 70        |
| <b>9</b>  | <b>Numerische Tests II</b>                                  | <b>73</b> |
| 9.1       | Modell-Szenario: Sturm-Sturm-Interaktion . . . . .          | 73        |
| 9.2       | Gitter-Adaption . . . . .                                   | 75        |
| 9.2.1     | Indikatoren . . . . .                                       | 76        |
| 9.3       | Auswertung . . . . .  | 80        |
| 9.3.1     | Adaptierte Gitter . . . . .                                 | 80        |
| 9.3.2     | Globaler Fehler . . . . .                                   | 82        |
| 9.3.3     | Fehler in der Sturmposition . . . . .                       | 83        |
| 9.4       | Fazit . . . . .   | 85        |
| <b>10</b> | <b>Zusammenfassung und Perspektiven</b>                     | <b>87</b> |
|           | <b>Literaturverzeichnis</b>                                 | <b>89</b> |
|           | <b>Danksagung</b>   | <b>91</b> |

# 1. Einführung

Zusammen mit Überflutungsereignissen und Erdbeben gehören tropische Wirbelstürme zu den verheerendsten geophysikalischen Phänomenen: 1970 forderte ein Zyklon in Bangladesch 300000 Todesopfer, 2005 verursachte Hurricane Katrina einen finanziellen Schaden, der sich auf rund *US*\$ 160 Mrd. beläuft. Die akkurate und frühzeitige Vorhersage der Zugbahn ist demnach von äußerster Wichtigkeit. Sowohl eine falsch vorhergesagte Zugbahn als auch eine zu spät erfolgte Warnung kann schwerwiegende Folgen haben.

Um frühzeitig eine Vorhersage treffen zu können, ist ein geeignetes numerisches Modell erforderlich. Die numerische Modellierung eines tropischen Wirbelsturmes bringt jedoch eine große Herausforderung mit sich: Die Prozesse, die die Entstehung, Intensivierung und Bewegung eines Wirbelsturmes verursachen, laufen auf unterschiedlichen Größenskalen ab. Strömungen mit einer Skala von mehreren tausend Kilometern dominieren die Bewegung eines Sturms. Für dessen Entstehung sind dagegen kleinskalige konvektive Ereignisse von Bedeutung, die häufig auf Skalen von wenigen Kilometern ablaufen. Für die Änderung der Intensität und der Struktur sind sowohl klein- als auch großskalige Prozesse verantwortlich. Um dieser Herausforderung gerecht zu werden, ist ein entsprechender multiskaliger Ansatz erforderlich.

Obwohl in den letzten Jahrzehnten bedeutende Fortschritte in der Vorhersage der Zugbahn tropischer Wirbelstürme erzielt wurden, existieren nach wie vor Situationen, in denen dies extrem schwierig ist. Ein solches Beispiel ist die Interaktion zweier Wirbelstürme. Bereits in den 1920er Jahren untersuchte Fujiwhara die Interaktion zweier zyklonaler Wirbel anhand von Experimenten in einem Wassertank [1]. Seine Experimente zeigten, dass sich gleichartig rotierende Wirbel bei hinreichend kleinem Anfangsabstand annähern, während gleichzeitig eine zyklonale Umkreisung stattfindet. Im Endstadium der Interaktion vereinen sich beide Wirbel.

Lander und Holland [2] stellten 1993 anhand einer Analyse von Sturmpaaren im westlichen Nordpazifik unterschiedliche Interaktionsmuster fest, bei denen es nicht immer zu einer Vereinigung kam. Je nach Intensität, Radius und Abstand der beiden Zyklonen wurde eine andere gegenseitige Beeinflussung beobachtet. Im selben Jahr untersuchten Ritchie und Holland [3] die Gründe, weshalb sich manche Wirbel vereinen und andere nach einer Phase der Interaktion wieder auseinander driften. Sie fanden heraus, dass insbesondere der Abstand zwischen den Zyklonen einen wichtigen Faktor darstellt.

Die gegenseitige Beeinflussung kann einen entscheidenden Einfluss auf die Wirbelstruktur der Stürme haben, in Folge der Strukturänderung können sehr komplexe Zugbahnen resultieren. Die Interaktion zweier Stürme lässt sich auch als Bifurkations-Problem auffassen: Bereits minimale Änderungen der Ausgangslage können eine maximale Auswirkung auf die Zugbahn haben. Dass das Vorhandensein eines solchen binären Systems zweier interagierender Stürme die Vorhersagbarkeit der Zugbahn deutlich erschwert, zeigte 1970 Brand [4] anhand der Analyse von Taifunen im westlichen Nordpazifik.

Im Mittelpunkt des meteorologischen Interesses an der Interaktion zweier Wirbel steht die Erforschung der Kriterien, die zu einer gegenseitigen Beeinflussung oder einem Verschmelzen bzw. Auflösen führen können. In den vergangenen Jahrzehnten wurden hierzu zahlreiche Studien und numerische Experimente durchgeführt, die bereits zu bedeutenden Fortschritten im Verständnis der bei der Interaktion ablaufenden Prozesse geführt haben. Für die akkurate und frühzeitige Vorhersage der Zugbahn zweier interagierender Wirbel sind neben dem Verständnis der physikalischen Prozesse aber auch entsprechende numerische Methoden erforderlich, die die Multiskaligkeit des Problems berücksichtigen. Eine Möglichkeit multiskalige Probleme zu modellieren ist die Verwendung adaptiver Verfahren, die das Rechengitter lokal anpassen. Das Ziel der Adaption ist die Steigerung der Effizienz des Rechengitters. Diese ist definiert durch das Verhältnis zwischen der Qualität der Lösung und dem dazu erforderlichen Mehraufwand. Die Steigerung der Effizienz lässt sich durch unterschiedliche Techniken realisieren. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Technik der h-Adaptivität verwendet, bei der der Fehler durch lokales Erhöhen der Gitterauflösung reduziert werden soll. Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung, inwiefern sich adaptive Methoden zur akkuraten und frühzeitigen Vorhersage der Zugbahn tropischer Wirbelstürme eignen. Aufgrund der aus der Bifurkation resultierenden Sensibilität auf kleinste Fehler bei der numerischen Simulation eignet sich das Beispiel der interagierenden Wirbel hervorragend als Benchmark-Problem für adaptive Methoden.

Emanuel et. al [5] zeigten 2004 eine Abhängigkeit der Vorhersagbarkeit tropischer Zyklonen von der vertikalen Scherung der Umgebungsströmung. Vertikale Scherungen verursachen Änderungen der Sturmstruktur, in deren Folge es zu asymmetrischer Konvektion kommt. In Folge des lokalen Anpassens der Gitterauflösung wird in Simulationen auf adaptierten Gittern ebenfalls eine künstliche Asymmetrie erzeugt. Ein in dieser Arbeit betrachteter Aspekt ist deshalb die Frage, ob die durch die Adaption erzeugte künstlich Asymmetrie ebenfalls Auswirkungen auf die Intensität und die Zugbahn hat. Hierzu werden idealisierte Wirbelsturmszenarien mit zwei unterschiedlichen Software-Paketen auf adaptierten Gittern simuliert: HiFlow (EMCL, Karlsruher Institut für Technologie) und StormFlash (Klimacampus, Hamburg). In Kapitel 2 werden zunächst die Modellgleichungen hergeleitet, auf deren Basis die Simulation der Fluid-Dynamik in HiFlow und in StormFlash erfolgt. In Kapitel 3, 4 und 5 werden die den beiden Software-Paketen zu Grunde liegenden Diskretisierungs-Ansätze erläutert. Da sich HiFlow und StormFlash in vielerlei Hinsicht voneinander unterscheiden, werden beide Pakete in Kapitel 6 gegenüber gestellt. Kapitel 7 präsentiert abschließend die Ergebnisse numerischer Tests mit HiFlow und StormFlash: Ein Wirbel zieht entlang der Grenze zweier unterschiedlich fein aufgelöster Gebiete oder trifft unter verschiedenen Einfallswinkeln auf der Grenze auf, die im Folgenden Gittergradient genannt wird. Untersucht wird, ob der Wirbelsturm seine Intensität ändert oder von seiner Zugbahn abgelenkt wird. Die beiden Software-Pakete werden verglichen im Hinblick auf die Ergebnisse der numerischen Simulationen sowie den notwendigen Rechenaufwand.

Nachdem am Minimalbeispiel gezeigt ist, dass die Intensität und die Zugbahn eines Wirbels grundsätzlich nicht sehr stark von einem Gittergradienten beeinflusst werden, fokussiert der

zweite Teil die praktische Anwendung lokaler Gitteradaption. Dies betrifft insbesondere die Fragen, wie das Gitter angepasst werden soll, welche Kosten damit verbunden sind und welcher Vorteil dadurch entsteht. Zur Steuerung der Gitter-Adaption dienen Indikatoren, die sich aus physikalischen oder mathematischen Eigenschaften des betrachteten Problems ableiten lassen. Durch den natürlichen Zusammenhang zwischen der Gitterweite und dem resultierenden Fehler ist der Indikator im Fall mathematischer Kriterien bereits durch den lokalen, *a posteriori* (im Nachhinein) berechenbaren Fehlerbeitrag definiert. Physikalische Eigenschaften, wie z.B. die Vorticity, ändern sich in der Regel nicht mit der Gitterweite. Für diese Kriterien muss deshalb ein Indikator abgeleitet werden, der wie bei mathematischen Ansätzen mit der Gitterweite skaliert. Der Weg vom Indikator zum optimalen Gitter führt über die Adaption-Strategie. Diese passt das Gitter sukzessive durch Verfeinerungs- oder Vergrößerungsschritte an, die auf Anordnung der entsprechenden Indikatorwerte durchgeführt werden. Kapitel 8 stellt zunächst die unterschiedlichen Ansätze für die Definition eines Indikators vor: Physikalische Kriterien, *a posteriori* und zielorientierte Fehlerschätzer. Am Beispiel der mathematisch motivierten Adaptivität wird eine Adaption-Strategie vorgestellt, die auch für physikalische Kriterien angewandt werden kann. Es folgt ein Vergleich der verschiedenen Ansätze im Hinblick auf die Komplexität, die Implementierung und die Genauigkeit der Lösung, sowie den notwendigen Rechen- und Speicheraufwand. In Kapitel 9 werden abschließend die Ergebnisse numerischer Simulationen in HiFlow unter Verwendung verschiedener Adaption-Kriterien präsentiert. Als Benchmark-Problem dient die Interaktion zweier tropischer Wirbelstürme, die durch idealisierte Wirbel dargestellt werden.

Für das betrachtete Szenario lassen sich mit allen Indikatoren effiziente Gitter erzeugen, die zu einer möglichst akkuraten Lösung führen. Deutliche Unterschiede zwischen den Indikatoren existieren im Bezug auf den zur Adaptivität notwendigen Rechenaufwand und den Speicherbedarf. Ferner wird auch sichtbar, dass verschiedene Anwendungen eigene, problemspezifische Adaption-Methodiken erfordern können.





## 2. Modellgleichungen

Die Simulation der Fluid-Dynamik in HiFlow basiert auf den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, die im Folgenden hergeleitet werden. Ausgangspunkt hierfür ist die Cauchy-Gleichung, welche eine Formulierung des zweiten Newton'schen Axioms für kontinuierliche Medien darstellt.

Die physikalische Basis für die Simulation der Fluid-Dynamik in StormFlash bilden die Flachwassergleichungen. Vernachlässigt man die Reibung und integriert man über die Tiefe, so folgen diese direkt aus den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

### 2.1 Cauchy-Gleichung

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Änderung des Impulses proportional zur Summe der einwirkenden Kräfte.

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.1)$$

mit  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Betrachtet wird ein differentielles Volumenelement eines Fluids, das als Kontinuum behandelt wird. Die auf dieses Fluid einwirkenden Kräfte unterteilen sich in Massenkräfte  $\vec{F}_M$  (Gravitation, bei Rotation zusätzliche Scheinkräfte) und Oberflächenkräfte  $\vec{F}_O$  (Druck, Reibung).

Unter der Annahme, dass die Masse eine Erhaltungsgröße ist,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot V)}{dt} = 0$$

gilt die Kontinuitätsgleichung.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Für inkompressible Medien mit  $\rho = \text{const.}$  folgt daraus unmittelbar die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

Die Impulsänderung (2.1) entspricht demnach einer Änderung der Geschwindigkeit, also der Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \rho \cdot V \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

### Massenkräfte

Auf ein Fluid in einem Inertialsystem wirkt nur die *Gravitationskraft* der Erde. Die Kraft, die ein Volumenelement der Masse  $m$  in Folge der Erdanziehung erfährt, ist

$$\vec{G} = -mg\vec{k}.$$

$g$  ist dabei die Schwerebeschleunigung der Erde, die einen mittleren Wert von  $9,80665 \text{ m/s}^2$  hat.

### Oberflächenkräfte

Bei den Oberflächenkräften werden weiter Normal- von Scherspannungen unterschieden. Die *Druckgradientkraft* ist proportional der differentiellen Änderung des Drucks in alle drei Raumrichtungen und wirkt ausschließlich senkrecht zur Oberfläche, also in Richtung der Normalen:

$$\vec{D} = -\frac{m}{\rho} \nabla p$$

Die *Reibungskraft* bewirkt eine Scherung des Volumenelements und hat sowohl Beiträge in Normalen- als auch in Tangentialenrichtung. Der Tensor, der die Komponenten der Reibungskraft pro Fläche beschreibt, ist der Reibungsspannungstensor  $\tau$ . Die Reibungskraft ist damit definiert durch

$$\vec{R} = -\frac{m}{\rho} \nabla \cdot \tau.$$

Ein Zusammenhang zwischen dem Reibungsspannungstensor und den Geschwindigkeitskomponenten lässt sich durch die Postulate von Stokes finden: Die Spannung sei proportional der Deformation des Geschwindigkeitsfeldes.

$$\tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \tau_{ki} \quad (2.3)$$

$\eta$  beschreibt die Viskosität, also die Zähigkeit, eines Fluids.

Die Reibungskraft ist damit

$$\vec{R} = -\frac{m \cdot \eta}{\rho} (\Delta \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v})).$$

Aufgrund der Divergenzfreiheit verschwindet der letzte Term bei inkompressiblen Fluiden.

Die Kräftebilanz für ein differentielles Volumenelement eines Fluids, die *Cauchy-Gleichung*, lautet dann in massenspezifischer Form mit  $\vec{f}_i = \vec{F}_i/m$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum_i \vec{f}_i = \vec{f}_M + \vec{f}_O \\ &= \vec{g} + \vec{d} + \vec{r} \\ &= -g\vec{k} - \frac{1}{\rho}\nabla p - \mu(\Delta\vec{v})\end{aligned}\quad (2.4)$$

und  $\mu = \eta/\rho$ , der kinematischen Viskosität.

## 2.2 Navier-Stokes-Gleichungen

Aus der oben abgeleiteten Bilanzgleichung (2.4) und der Kontinuitätsgleichung (2.2) folgen unmittelbar die Navier-Stokes-Gleichungen, die das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in V$  und Druckfeld  $p(\vec{x}, t) \in S$  eines inkompressiblen, newton'schen Fluids beschreiben:

$$\partial_t \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\vec{k} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (2.5a)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (2.5b)$$

Alle Berechnungen werden auf einer zweidimensionalen, rein horizontal orientierten Ebene durchgeführt. Damit darf keine vertikale Beschleunigung  $\frac{dw}{dt}$  existieren, die z-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung ist dann

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (2.6)$$

Das System befindet sich also im hydrostatischen Gleichgewicht mit  $\partial p = -\rho g \partial z$ .

## 2.3 Flachwassergleichungen

Aus den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich nach Vernachlässigung der Reibung und nach Integration über die Tiefe die Flachwassergleichungen herleiten. Dabei handelt es sich um ein System hyperbolischer, partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung der Bewegung eines Fluids für lange, flache Wellen, bei denen die vertikale Beschleunigung verhältnismäßig klein ist.

### Herleitung

Ausgangspunkt sind die reibungsfreien, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, die sogenannten *Euler-Gleichungen*, in der horizontalen Ebene:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (2.7a)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (2.7b)$$

mit  $\vec{u} = (u, v)^T$  und  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ .

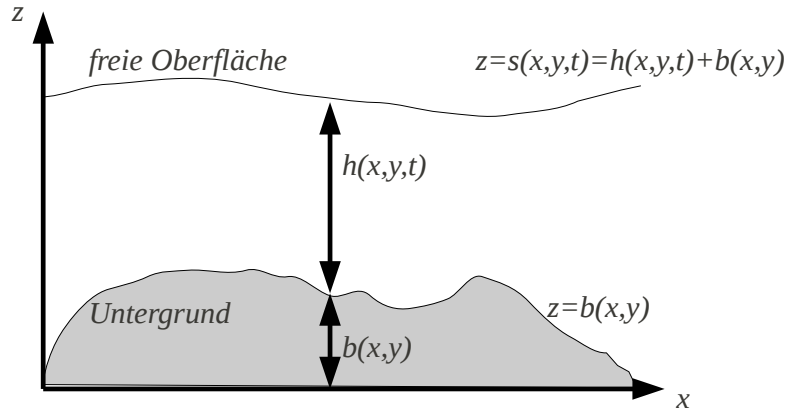


Abbildung 2.1: Referenzkoordinaten Flachwassergleichung

Die Höhe der freien Oberfläche  $s(x, y, t)$  lässt sich zu jedem Zeitpunkt ausdrücken durch die Höhe des festen Untergrundes  $b(x, y)$  und die Höhe des Fluids  $h(x, y, t)$ :

$$s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t)$$

Der Druck an der freien Oberfläche bei  $z = s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t)$  sei gleich dem atmosphärischen Druck und überall gleich groß

$$p(x, y, z, t)|_{z=s(x,y,t)} = p_{atm}$$

und es gilt die *no-slip-condition* ( $u = v = 0$ ). Damit kann kein Fluss in Normalenrichtung  $\partial_t s + u\partial_x s + v\partial_y s - w(s) = 0$  existieren.

Am Boden bei  $z = b(x, y)$  gilt ebenfalls die *no-slip-condition* ( $u = v = 0$ ), auch hier kann kein Fluss in Normalenrichtung existieren  $u\partial_x b + v\partial_y b - w(b) = 0$ .

Im Fluid sollen hydrostatische Verhältnisse gelten, d.h.

$$\begin{aligned} \partial p &= -\rho g \partial z \\ p(x, y, z, t) &= -\int_z^s \rho g \, dz \\ &= \rho g (s(x, y, t) - z) + p_{atm}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Leitet man Gleichung (2.8) in x-Richtung und in y-Richtung ab

$$\begin{aligned} \partial_x p &= \rho g \partial_x s \\ \partial_y p &= \rho g \partial_y s \end{aligned}$$

und setzt diese Beziehungen in die komponentenweisen Euler-Gleichungen (2.7a) ein, erhält man folgende Beziehungen:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = -g\partial_x s \quad (2.9a)$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v = -g\partial_y s. \quad (2.9b)$$

Die zweite Gleichung der Euler-Gleichungen (2.7b), die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes, wird ebenfalls über die Höhe des Fluids integriert:

$$\int_b^s \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w \, dz = 0$$

$$\int_b^s \partial_x u \, dz + \int_b^s \partial_y v \, dz + w(s) - w(b) = 0 \quad (2.10)$$

Mit den oben definierten Randbedingungen am Boden und an der freien Oberfläche lassen sich deren vertikale Geschwindigkeiten an den Höhen  $s$  und  $b$  bestimmen:

$$\begin{aligned} u\partial_x b + v\partial_y b - w(b) &= 0 && \text{am Boden} \\ w(b) &= (u\partial_x b + v\partial_y b)|_{z=b} \\ \partial_t s + u\partial_x s + v\partial_y s - w(s) &= 0 && \text{an der freien Oberfläche} \\ w(s) &= (\partial_t s + u\partial_x s + v\partial_y s)|_{z=s} \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.10), ergibt das

$$\begin{aligned} (\partial_t s + u\partial_x s + v\partial_y s)|_{z=s} - (u\partial_x b + v\partial_y b)|_{z=b} \\ + \int_b^s \partial_x u(x, y, t) \, dz + \int_b^s \partial_y v(x, y, t) \, dz = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Da  $s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t)$ , sind die ersten zwei Summanden der Gleichung (2.11) gleich  $\partial_t h + u\partial_x h + v\partial_y h$ .

$$\partial_t h + u\partial_x h + v\partial_y h + \int_b^s \partial_x u(x, y, t) \, dz + \int_b^s \partial_y v(x, y, t) \, dz = 0$$

Da  $h = \int_b^s dz$  ist und  $u \neq u(z)$ , bzw.  $v \neq v(z)$ , können die Terme mit den räumlichen partiellen Ableitungen von  $h$  mit in die Integrale über  $z$  gezogen werden. Die partiellen Ableitungen lassen sich dann über die Leibniz'sche Regel vor das Integral stellen.

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x \int_b^s u(x, y, t) \, dz + \partial_y \int_b^s v(x, y, t) \, dz = 0 \\ \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Gleichung (2.12) wird mit  $u$  bzw. mit  $v$  multipliziert und zur jeweiligen mit  $h$  multiplizierten Bewegungsgleichung (2.9a) und (2.9b) addiert. Die Gleichung in x-Richtung ist dann,

$$\begin{aligned} \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_y(huv) &= -gh\partial_x s \\ &= -gh\partial_x(b+h) \\ &= -gh\partial_x b - \frac{1}{2}\partial_x(gh^2) \end{aligned}$$

mit der Gleichung in y-Richtung wird analog verfahren.

Das Resultat sind die *Flachwassergleichungen*:

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \quad (2.13a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \partial_y(huv) = -gh\partial_x b \quad (2.13b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) = -gh\partial_y b \quad (2.13c)$$

Die Flachwassergleichungen folgen also direkt aus den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen unter Vernachlässigung der Reibung und Integration über die Tiefe.



## 3. Finite-Elemente-Methode (FEM)

Mit Hilfe der Finite Elemente Methode lassen sich numerische Methoden zur Lösung von Randwertproblemen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen ableiten. Ungleich Finiten Differenzen und Volumen Verfahren lösen Finite Elemente Verfahren nicht die ursprüngliche Gleichung, sondern eine Variationsformulierung der Gleichung.

Die Theorie der Finiten Elemente Methode wird zunächst anhand eines einfachen Beispiels hergeleitet. Anschließend wird die Theorie angewandt auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

### 3.1 FEM für elliptische Differentialgleichungen

Gegeben sei eine elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung. Als Beispiel dient das Poisson-Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\Delta u(x, y) = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.1a)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.1b)$$

Jede Funktion  $u \in V$ , die diese Gleichung löst, muss in  $V = C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  liegen. Erfüllt eine Lösung diese Bedingung, so spricht man von einer *klassischen Lösung*. Problematisch wird die Suche nach klassischen Lösungen, sobald die Berandung des Gebiets nicht hinreichend glatt ist.

#### 3.1.1 Variationsformulierung

Aus dem ursprünglichen Poisson-Problem  $\Delta u(x, y) = f$  in  $\Omega$  mit  $u \in V$  kann man nun eine Variationsformulierung ableiten, dessen Lösung schwächere Bedingungen zu erfüllen hat, als die klassische Lösung.

Die Poisson-Gleichung (3.1a) wird dazu multipliziert mit einer zunächst beliebigen Testfunktion  $v \in V$  und integriert über  $\Omega$ .

$$-\int_{\Omega} v \Delta u(x, y) \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f v \, d\vec{x}$$

Unter Ausnutzen der folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\Delta u &= \nabla \cdot \nabla u \\ \nabla \cdot (v \nabla u) &= v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{f} \, d\vec{x} &= \int_{\partial\Omega} f \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{Gaußscher Integralsatz})\end{aligned}$$

wird daraus

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} v \Delta u(x, y) d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u - \nabla \cdot (v \nabla u)) \, d\vec{x} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u) \, d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} v (\nabla u \cdot \vec{n}) \, ds\end{aligned}\quad (3.2)$$

Im ursprünglichen Problem war gefordert, dass die Lösung  $u$  und  $\Delta u$  stetig sind,  $u$  muss dann in  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  liegen. Damit das Volumenintegral in der Variationsformulierung (3.2) wohldefiniert ist, müssen  $\nabla u$ ,  $\nabla v$  und  $v$  quadratintegrierbar nach Lebesgue sein, d.h. sie müssen in  $L^2(\Omega)$  liegen. Ein Raum der diese Bedingungen erfüllt, ist der Sobolevraum  $H^1(\Omega)$ . Dessen Unterraum  $H_0^1(\Omega)$  erfüllt zusätzlich die Nullrandbedingungen von  $u$  und bewirkt, dass das Randintegral in Gleichung (3.2) verschwindet. Die starken Stetigkeitsbedingungen des Ausgangsproblems  $u \in C^2 \cap C^0$  wurden also ersetzt durch wesentlich schwächere Integrierbarkeitsbedingungen  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Das zu lösende Variationsproblem ist damit:

Finde  $u \in H_0^1(\Omega)$ , so dass

$$(\nabla u \cdot \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.3)$$

für alle Testfunktionen  $v$  aus  $H_0^1(\Omega)$  erfüllt ist.

Dass das Variationsproblem eine eindeutige Lösung besitzt, kann mit dem Theorem von Lax-Milgram bewiesen werden. Eine ausführliche Behandlung findet sich in Braess [6].

### Sobolevräume

Sobolevräume basieren auf dem Funktionenraum  $L^2(\Omega)$ , dem Raum aller Funktionen, deren Quadrat Lebesgue-integrierbar ist. Mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_0 = (u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_0 = \sqrt{(u, v)_0}$$

wird er zu einem Hilbertraum.

Eine Funktion  $u \in L^2(\Omega)$  hat eine schwache Ableitung  $v = \partial^\alpha u$  vom Grad  $\alpha$  mit  $v \in L^2(\Omega)$ , wenn

$$(\phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$C_0^\infty$  ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit Nullrandbedingungen.

Der Sobolevraum  $H^m$   $m \geq 0$  ist der Hilbertraum, in dem alle Funktionen  $u$  in  $L^2(\Omega)$  schwache Ableitungen  $\partial^\alpha u$  für alle  $|\alpha| \leq m$  besitzen.

Der verwendete Sobolevraum  $H_0^1$  ist also der Raum der nach Lebesgue quadratintegrierbaren Funktionen mit Nullrandbedingungen, die schwache Ableitungen  $\partial u$  in  $\Omega$  besitzen.



### 3.1.2 Galerkin-Methode

Mit der Variationsformulierung selbst lässt sich die Differentialgleichung noch immer nicht lösen. Benötigt wird noch ein Ansatz, der die kontinuierliche Problemstellung aus dem unendlich-dimensionalen Raum  $H_0^1$  in einen endlich-dimensionalen Unterraum  $V_h$  transformiert. Das Problem wird *diskretisiert*. Die Basis dieser Idee bildet die Galerkin-Methode.

Gesucht ist nun also eine Lösung  $u_h$  aus einem endlich-dimensionalen Unterraum  $V_h \subset H_0^1$ , so dass

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v_h) \, d\vec{x} = \int_{\Omega} v_h f \, d\vec{x} \quad \forall v_h \in V_h(\Omega) \quad (3.4)$$

Der diskrete Unterraum  $V_h$  sei  $N$ -dimensional. Dann existiert eine Basis  $\{\varphi_i\}, i = 1, \dots, N$  linear unabhängiger Funktionen in  $V_h$ . Die diskrete Lösung  $u_h$  muss sich dann über diese Basis darstellen lassen.

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \quad (3.5)$$

Setzt man diese Darstellung in das diskrete Variationsproblem (3.4) ein, erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v_h \cdot \sum_{j=1}^N u_j \nabla \varphi_j) \, d\vec{x} &= \int_{\Omega} v_h f \, d\vec{x} & \forall v_h \in V_h \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} (\nabla v_h \cdot \nabla \varphi_j) \, d\vec{x} &= \int_{\Omega} v_h f \, d\vec{x} & \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

Bis jetzt war  $v_h$  eine beliebige Funktion aus  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ . Identifiziert man  $v_h$  mit der Basis  $\{\varphi_i\}$  von  $V_h$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \, d\vec{x}}_{a_{ij}} &= \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_i f \, d\vec{x}}_{b_i} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^N u_j a_{ij} &= b_i \end{aligned}$$

so erhält man ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsvektor  $\vec{u}$  die Komponenten  $u_j$  des Galerkin-Ansatzes (3.5) enthält.

$$A\vec{u} = \vec{b} \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Finite Elemente

Als Lösungsraum für das diskrete Variationsproblem dienen sogenannte *Finite-Elemente-Räume*. Dazu wird das Gebiet  $\Omega$  in  $N$  Zellen zerlegt, auf denen man polynomiale Ansatzfunktionen definiert. Für zweidimensionale Probleme kommen als Zellen Dreiecke oder Vierecke in Frage, für dreidimensionale Probleme können Tetraeder, Quader etc. verwendet werden. Die Zerlegung eines Gebiets  $\Omega$  in  $N$  Zellen nennt man *Triangulierung*  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ .

Die formale Definition eines Finiten Elements ist nach Ciarlet [7]:

Ein Finites Element ist ein Tripel  $(K, P, \Sigma)$  mit

- $K =$  polyederische Zelle (z.B. Dreieck),  $K \subset \mathbb{R}^d$
- $P(K) =$  Raum der Ansatzfunktionen auf  $K$  mit endlicher Dimension.
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ , Menge von linear unabhängigen Funktionalen auf  $P(K) \Rightarrow$  Anzahl der Freiheitsgrade

#### Lagrange-Elemente

Die Basis eines Lagrange-Elements bilden diejenigen Funktionen, die an genau einem Punkt aller Knotenpunkte des Elements einen von Null verschiedenen Wert annehmen, d.h.  $P(K)$  wird so gewählt, dass  $\sigma_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$  ist. Man nennt diese Funktionen  $\varphi_i^K$  auch *lokale Formfunktionen*. Sie bilden die *nodale Basis* des Elements.

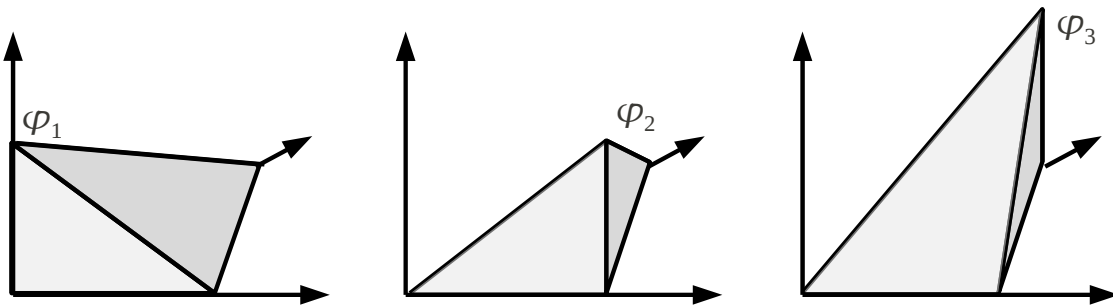


Abbildung 3.1: Basisfunktionen  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  für das lineare Lagrange-Element. Jedes  $\varphi_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  hat an genau einem der drei Knotenpunkte des Elements einen von Null verschiedenen Wert.

Bei einem dreieckigen, linearen Lagrange-Element werden lineare Funktionen als Formfunktionen verwendet, d.h.  $P(K) = \mathbb{P}_1$ . Die Anzahl der Freiheitsgrade je Elemente ist damit  $\Sigma(K) = 3$ . Für quadratische Ansatzfunktionen  $\mathbb{P}_2$  hat jedes Element  $\Sigma = 6$  Freiheitsgrade, kubische Dreieckselemente haben  $\Sigma(K) = 10$  Freiheitsgrade.

Für jede der  $N$  Zellen der Zerlegung von  $\Omega$  wird ein Element  $(K, P, \Sigma)$  definiert. Die globalen Basisfunktionen  $\varphi_i$  setzen sich dann zusammen aus den lokalen Formfunktionen der einzelnen Elemente und denen ihrer Nachbarn.

#### Anforderungen an die Triangulierung

- Die Vereinigung aller Elemente ist gleich dem Abschluss des Gebietes:

$$\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^M T_i.$$

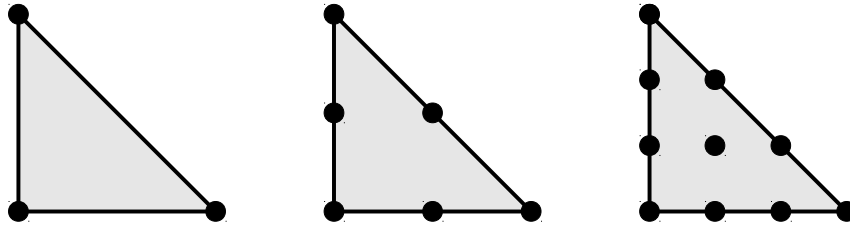


Abbildung 3.2: Lagrange-Elemente: nodale Basen des linearen, quadratischen und kubischen Dreieckselements ( $\mathbb{P}_1$ ,  $\mathbb{P}_2$  und  $\mathbb{P}_3$ ).

- Der Schnitt zweier Elemente  $T_i \cap T_j$  mit  $i \neq j$  ist entweder leer, besteht aus einem gemeinsamen Eckpunkt von  $T_i$  und  $T_j$  oder aus einer gemeinsamen Kante.
2. Eine Triangulierung heißt *quasiuniform*, wenn es einen Regularitätsparameter  $\kappa \geq 0$  gibt, so dass jedes  $T_i \in T$  einen Kreis vom Radius  $r_T$  mit  $r_T \geq \frac{h_T}{\kappa}$  besitzt.  $h_T$  ist dabei der halbe Durchmesser eines Elements  $T$ .
  3. Eine Triangulierung heißt *uniform*, wenn es einen Regularitätsparameter  $\kappa \geq 0$ , so dass jedes  $T_i \in T$  einen Kreis vom Radius  $r_T$  mit  $r_T \geq \frac{h}{\kappa}$  besitzt, wobei  $h = \max_{T_i \in T} h_{T_i}$ .

### 3.1.4 Adaptierte Gitter und Fehler der Finiten Elemente Lösung

Bislang wurde immer von einer uniformen Triangulierung ausgegangen, bei der alle Elemente gleich *fein* sind. Adaptive Methoden erfordern den Einsatz *unterschiedlich feiner* Elemente. Vorab gilt es also zu klären, wie sich ein adaptiertes Gitter realisieren lässt. Im Vorgriff auf Kapitel 8 werden hier typische Konzepte der Adaptions-Techniken vorgestellt. Alle resultieren aus der Abhängigkeit des Fehlers der Finiten Elemente Lösung von der Gitterweite der verwendeten Triangulierung und vom Polynomgrad der Basisfunktionen. Die Information *wie fein* eine Element ist, kann sich also sowohl auf die Gitterweite als auch auf den Polynomgrad der Basisfunktionen beziehen.

Neben der im Weiteren vorgestellten Adaption über die Gitterweite (h-Adaptivität) und der Adaption über den Polynomgrad (p-Adaptivität) existieren weitere Techniken (z.B. Gitterdeformation) und Mischformen, die hier nicht näher vorgestellt werden sollen.

#### h-Adaptivität

Eine vielfach verwendete Methode der Gitter-Adaption basiert auf einer lokalen Verringerung des Gitterweite. Der a-priori-Fehler  $\epsilon$  der approximierten Lösung  $u_h$  zur unbekanntenen exakten Lösung  $u$  kann nach Braess [6, S. 85ff.] definiert werden durch Abschätzungen der Form

$$\epsilon = \|u - u_h\| \leq ch^\nu, \quad (3.7)$$

wobei  $h$  die Gitterweite,  $\nu$  die Fehlerordnung und  $c$  eine Stabilitätskonstante ist.

Geht  $h \rightarrow 0$ , so verschwindet der mit Gleichung (3.7) berechnete Fehler, die Lösung wird also immer genauer approximiert. Eine Verfeinerung im Sinne der h-Adaptivität bedeutet also eine lokale Verringerung der Zellweite  $h$ .

**p-Adaptivität**

Diese Methode basiert auf der Abhängigkeit des Fehlers vom Polynomgrad der Basisfunktionen. Eine a-priori Fehlerabschätzung für die Approximation durch Polynome gewinnt man durch den Fehlerschätzer nach Babuska et al. [8]:

$$\epsilon = \|u - u_p\|_l \leq ck^{-(m-l)}, \quad (3.8)$$

wobei  $u_p$  eine Approximation von  $u$  durch Polynome des Polynomgrades  $k$  ist und  $0 \leq l \leq m$ . Der Approximationsfehler wird also minimiert durch ein Ansteigen des Polynomgrades. Die Verfeinerung im Sinne der p-Adaptivität bedeutet damit eine Erhöhung des Polynomgrades auf einzelnen Zellen, so dass der Fehlerbeitrag dieser Zelle geringer wird.

## 4. HiFlow

HiFlow ist ein vielseitiges Finite Elemente Software-Paket zur effizienten und akkuraten Lösung partieller Differentialgleichungen, das vom *Engineering Mathematics and Computing Lab* (EMCL) des Karlsruher Instituts für Technologie entwickelt wurde [9]. Es setzt sich zusammen aus einem Modul zur Gittergenerierung, einem Modul der Finiten Elemente Methode und der Behandlung der Freiheitsgrade und einem linearen Algebra Modul.

In dieser Diplomarbeit wird HiFlow eingesetzt zur Lösung einer diskreten Variationsformulierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Als Diskretisierungs-Verfahren dient ein stetiges Galerkin-Verfahren. Die verwendeten Finiten Elemente sind stabile Taylor-Hood-Elemente, gerechnet wird auf Viereck-Elementen.

Bei den mit HiFlow durchgeführten Simulationen des ersten Modellszenarios 7 wird ein implizites cGP(1)-Verfahren der Ordnung 2 als Zeitschrittverfahren verwendet. Alle Simulationen des zweiten Modellszenarios werden mit HiFlow in der komplett überarbeiteten Version HiFlow<sup>3</sup> durchgeführt. Als Zeitschrittverfahren dient hier ein Crank-Nicolson-Verfahren. Gegenüber der bisher verwendeten Version ergeben sich ansonsten keine weiteren Änderungen.

### 4.1 Variationsformulierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Aus dem System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen (2.5a) kann ebenfalls eine Variationformulierung abgeleitet werden.

Dazu wird die Navier-Stokes-Gleichung (2.5a) wieder mit einer Testfunktion  $\vec{\varphi} \in V$  multipliziert und über  $\Omega$  integriert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \vec{u} \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x} - \nu \int_{\Omega} (\Delta \vec{u}) \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x} \\ + \int_{\Omega} [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x} + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} (\nabla p) \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Unter Ausnutzen der Greenschen Identität und einer partiellen Integration ergibt sich

daraus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \vec{u} \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} + \nu \int_{\Omega} (\nabla \otimes \vec{u})^T : (\nabla \otimes \vec{\varphi})^T d\vec{x} \\ - \nu \int_{\partial\Omega} [(\nabla \otimes \vec{u})^T \vec{n}] \cdot \vec{\varphi} ds + \int_{\Omega} [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} \\ + \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} p (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) ds - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \vec{\varphi}) d\vec{x} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Um die Randintegrale in Gleichung (4.1) verschwinden zu lassen, wählt man den Raum  $V$  so, dass auf dem gesamten Gebiet homogene Dirichlet-Randbedingungen angenommen werden mit  $\vec{u} = \vec{\varphi} = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Damit wird Gleichung (4.1) vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Omega} \partial_t \vec{u} \cdot \vec{\varphi} d\vec{x}}_{a(\vec{u}, \vec{\varphi})} + \nu \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \otimes \vec{u})^T : (\nabla \otimes \vec{\varphi})^T d\vec{x}}_{a(\vec{u}, \vec{\varphi})} \\ + \underbrace{\int_{\Omega} [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] \cdot \vec{\varphi} d\vec{x}}_{c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi})} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\int_{\Omega} p (\nabla \cdot \vec{\varphi}) d\vec{x}}_{b(p, \vec{\varphi})} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die zweite Gleichung des Navier-Stokes-Problems (2.5b) wird mit einer Testfunktion  $\psi \in S$  multipliziert und ebenfalls über  $\Omega$  integriert

$$\int_{\Omega} \psi \nabla \vec{u} d\vec{x} = 0$$

oder äquivalent:  $b(\psi, \vec{u}) = 0$

Damit ist das den Navier-Stokes-Gleichungen zugehörige Variationsproblem

$$(\partial_t \vec{u}, \vec{\varphi}) + a(\vec{u}, \vec{\varphi}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi}) + b(p, \vec{\varphi}) = 0 \quad \forall \vec{\varphi} \in V \quad (4.3a)$$

$$b(\psi, \vec{u}) = 0 \quad \forall \psi \in S \quad (4.3b)$$

Der Lösungsraum  $V$  für die Testfunktion  $\vec{\varphi} \in V$  ist der Sobolevraum  $V := \{\vec{v} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\}$ . Der Raum  $S$  ist  $S := \{p \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p d\vec{x} = 0\}$ . Würde man den Druck nicht auf eine beliebige Konstante (hier: 0) normieren, hätte das Variationsproblem keine eindeutige Lösung für den Druck.

Die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung wird unter anderem eingeschränkt durch die *inf-sup-Bedingung* (oder auch *Ladyženskaya-Babuška-Brezzi-Bedingung*, kurz *LBB-Bedingung*).

$$\inf_{\psi \in S} \sup_{\vec{\varphi} \in V^2} \frac{b(\psi, \vec{\varphi})}{\|\vec{\varphi}\| \cdot \|\psi\|} \geq \beta > 0 \quad (4.4)$$

Diese Bedingung muss sowohl vom kontinuierlichen, als auch vom diskreten Problem erfüllt werden. Bei der Wahl der Finite-Elemente-Räume ist dies zu beachten.

## 4.2 Diskretisierung des kontinuierlichen Problems

Aus den zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen wurde unter Ausnutzen der Randbedingungen und der Divergenzfreiheit ein Variationsproblem geschaffen, dessen Lösung  $\vec{u}$  in  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  und  $p$  in  $L^2(\Omega) | \int_{\Omega} p d\vec{x} = 0$  liegen muss. Bei der Variationsformulierung handelt es sich nach wie vor um ein kontinuierliches Problem, das nun in ein endlich dimensionales Problem in  $V_h$  umgewandelt werden muss. Für den instationären Fall ist dazu sowohl eine Diskretisierung des Gebiets als auch eine Diskretisierung der Zeit notwendig.

### 4.2.1 Diskretisierung des Gebiets

Auch hier wendet man zunächst die Galerkin-Methode an, die Lösungen lassen sich also durch die Basen der jeweiligen Ansatzräume ausdrücken.

$$\vec{u}_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \vec{u}_j(t) \vec{\varphi}_j(\vec{x})$$

$$p_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N p_j(t) \psi_j(\vec{x})$$

Bei der Wahl der Finite-Elemente-Räume für die Geschwindigkeit und den Druck ist die bereits erwähnte *inf-sup-Bedingung* (4.4) einzuhalten. In allen Simulationen mit HiFlow wurde das Taylor-Hood-Element  $Q_2 - Q_1$  verwendet, welches die geforderte inf-sup-Stabilität gewährleistet.

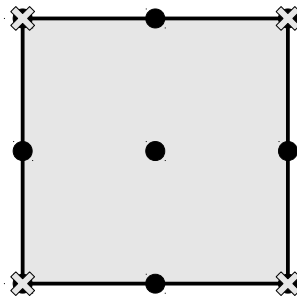


Abbildung 4.1: Taylor-Hood-Element  $Q_2 - Q_1$ . Die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  wird an den schwarzen Punkten, der Druck  $p$  an den weißen Kreuzen berechnet.

Das  $Q_2 - Q_1$ -Element ist ein Viereck-Element mit biquadratischen Funktionen für die Geschwindigkeit und bilinearen Funktionen für den Druck. Die Verwendung dieser Funktionen garantiert eine kontinuierliche Approximation für Geschwindigkeit und Druck.

### 4.2.2 Diskretisierung der Zeit

#### Continuous Galerkin-Petrov-Verfahren

Zur Diskretisierung der Zeit wird das konforme *continuous Galerkin-Petrov-Verfahren* verwendet, welches in der Literatur häufig auch unter dem Begriff *discontinuous Galerkin-Petrov-Verfahren* aufzufinden ist. Anders als bei der Gebietsdiskretisierung verwendeten Galerkin-Methode müssen Ansatz- und Testfunktionen nicht dem selben Funktionenraum entstammen. Als Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeit werden stückweise lineare,

global stetige Funktionen verwendet, die Ansatzfunktionen für den Druck sind stückweise konstante, demnach also nicht stetige Funktionen. Für die Testfunktionen werden sowohl in der Geschwindigkeit, als auch im Druck stückweise konstante, nicht stetige Funktionen verwendet. Die Wahl dieser diskreten Räume führt zu einer stabile Methode [10].

Um aus der Variationsformulierung eine Zeitdiskretisierung abzuleiten, wird Gleichung (4.3a) integriert über das diskrete Zeitintervall  $I_n = [t_{n-1}, t_n]$  mit  $n \in \{1, \dots, N\}$  und  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ .

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\partial_t \vec{u}, \vec{\varphi}) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a(\vec{u}, \vec{\varphi}) dt \\ + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi}) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(p, \vec{\varphi}) dt = 0 \quad \forall \vec{\varphi} \in V \end{aligned}$$

Als Integrationsformel wird die Simpson'sche Formel verwendet, die die numerische Näherung eines Integrals einer Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  berechnet.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4 \cdot f(\frac{b-a}{2}) + f(b)] \quad (4.5)$$

Unter Ausnutzen des Satzes von Fubini über mehrdimensionale Integration, der Beziehung  $t_{n-1/2} = \frac{1}{2}(t_{n-1} + t_n)$  und der Abkürzung  $u(t_i) = u_i$  sind die Beiträge der einzelnen Summanden in (4.3a):

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\partial_t \vec{u}, \vec{\varphi}) dt &= (\vec{u}_i, \vec{\varphi}) - (\vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi}) \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} a(\vec{u}, \vec{\varphi}) dt &= \frac{\Delta t}{6} [a(\vec{u}_i, \vec{\varphi}) + 4a(\vec{u}_{i-1/2}, \vec{\varphi}) + a(\vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi})] \\ &= \frac{\Delta t}{2} \cdot [a(\vec{u}_i, \vec{\varphi}) + a(\vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi})] \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(p, \vec{\varphi}) dt &= \frac{\Delta t}{6} [b(p_i, \vec{\varphi}) + 4b(p_{i-1/2}, \vec{\varphi}) + b(p_{i-1}, \vec{\varphi})] \\ &= \frac{\Delta t}{2} \cdot [b(p_i, \vec{\varphi}) + b(p_{i-1}, \vec{\varphi})] \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi}) dt &= \frac{\Delta t}{6} [c(\vec{u}_i, \vec{u}_i, \vec{\varphi}) + 4c(\vec{u}_{i-1/2}, \vec{u}_{i-1/2}, \vec{\varphi}) + c(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi})] \\ &= \frac{\Delta t}{6} [2c(\vec{u}_i, \vec{u}_i, \vec{\varphi}) + c(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{\varphi}) + c(\vec{u}_i, \vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi}) + 2c(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi})] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die kontinuierlichen Lösungen  $\vec{u}(t)$  und  $p(t)$  werden zu jedem der  $N$  Zeitpunkte mit Hilfe der Galerkin-Methode approximiert durch Polynome vom Grad  $k$  bzw.  $l$ .

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) \approx \vec{u}_\tau(t) &:= \sum_{j=0}^k \vec{U}_n^j \phi_{n,j} & \forall t \in I_n \\ p(t) \approx p_\tau(t) &:= \sum_{j=0}^l P_n^j \phi_{n,j} & \forall t \in I_n \end{aligned}$$



$\tau$  ist der Zeitdiskretisierungsparameter und legt die maximale Zeitschrittgröße fest,  $\phi_{n,k} \in P_k(I_n)$  sind die Basisfunktionen des gewählten Ansatzraumes und die Koeffizientenpaare  $(\vec{U}_n^j, P_n^j)$  Elemente des Hilbertraumes  $V \times S$  für  $j = \{1, \dots, k\}$ . Die Basisfunktionen  $\phi_{n,k}$  sind Lagrange'sche Basisfunktionen, die nur zu den diskreten Zeitpunkten  $t_n$  ungleich Null sind.

Für die Ansatzfunktionen wird  $k = 1$  und  $l = 0$  verwendet, der Galerkin-Ansatz für  $\vec{u}(t)$  und  $p(t)$  ist demnach

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &\approx \vec{u}_\tau(t) := \vec{U}_n^0 \phi_{n,0} + \vec{U}_n^1 \phi_{n,1} & \forall t \in I_n \\ &= \frac{\Delta t}{2} [\vec{U}_n + \vec{U}_{n-1}] \\ p(t) &\approx p_\tau(t) := P_n^0 & \forall t \in I_n. \end{aligned}$$

Aus einer gegebenen, diskreten Lösung  $\vec{u}_\tau(t_{n-1})$  zum Zeitpunkt  $t = t_{n-1}$  lässt sich damit eine diskrete Lösung  $\vec{u}_\tau(t_n)$  zum nächsten diskreten Zeitpunkt  $t = t_n$  approximieren.

### Crank-Nicolson-Verfahren

Ab Kapitel 9 wird eine aktuellere Version von HiFlow, *HiFlow*<sup>3</sup>, verwendet. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Experimente ergibt sich aus numerischer Sicht nur eine Änderung: Zum Zeitpunkt der Durchführung der Tests war das bislang verwendete, im vorigen Abschnitt beschriebene continuous Galerkin-Petrov-Verfahren noch nicht implementiert. In den Simulationen mit *HiFlow*<sup>3</sup> erfolgt die Zeitdiskretisierung deshalb über ein Crank-Nicolson-Verfahren. Dieses ist ein implizites Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung, das eine Kombination aus dem Euler-Vorwärts-Verfahren zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  und dem Euler-Rückwärts-Verfahren zum Zeitpunkt  $t_n$  darstellt.

Für eine eindimensionale partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u = F(u, x, t, \partial_x u, \partial_x^2 u)$$

ist der Differenzenquotient unter Verwendung der bereits eingeführten Notation  $u(t_i) = u_i$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (F(u_i, x, t_i, \partial_x u_i, \partial_x^2 u_i) + F(u_{i-1}, x, t_{i-1}, \partial_x u_{i-1}, \partial_x^2 u_{i-1})).$$

Abgesehen vom Beitrag des nichtlinearen Terms  $\int_{t_{n-1}}^{t_n} c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi}) dt$ , entspricht das Crank-Nicolson-Schema der Diskretisierung auf Basis des cGP(1)-Verfahrens. Die Differenz des Beitrags des nichtlinearen Terms beim Crank-Nicolson-Verfahren

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{\varphi}) dt = \frac{\Delta t}{6} [3c(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i-1}, \vec{\varphi}) + 3c(\vec{u}_i, \vec{u}_i, \vec{\varphi})]$$

zum cGP(1)-Verfahren (4.6) kann als Quadraturfehler interpretiert werden. Schieweck [10] spricht beim Crank-Nicolson-Verfahren von einem nicht-exakten cGP(1)-Verfahren.



## 5. StormFlash

StormFlash ist ein Software-Paket zur Lösung einer diskreten Variationsformulierung der zweidimensionalen Flachwassergleichungen, das von der Arbeitsgruppe *Numerische Methoden in den Geowissenschaften* des Hamburger Klimacampus entwickelt wurde. Die Gittergenerierung bewerkstelligt amatos, der *Adaptive Mesh Generator for Atmospheric and Oceanic Simulation* des Alfred-Wegener-Instituts Bremerhaven.

In dieser Diplomarbeit wird in StormFlash auf einem Dreieck-Gitter mit linearen Ansatz- und Testfunktionen gerechnet. Als Zeitschrittverfahren dient ein explizites zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2.

Im Gegensatz zu HiFlow wird bei der Diskretisierung ein unstetiges Galerkin-Verfahren verwendet, welches ebenfalls Finite-Elemente-Verfahren darstellt. Auch hier wird zunächst eine Variationsformulierung des ursprünglichen Problems abgeleitet, mit Hilfe der Galerkin-Methode wird das kontinuierliche Problem in ein diskretes Problem umgewandelt. Anders als beim stetigen Finite-Elemente-Verfahren kann der Lösungsraum  $V_h$  des diskreten, variationellen Problems jedoch so gewählt werden, dass an den Grenzen zwischen den Elementen Unstetigkeiten erlaubt sind.

### 5.1 Variationsformulierung der Flachwassergleichungen

Um das System der Flachwassergleichungen (2.13a)-(2.13c) lösen zu können wird eine alternative Formulierung verwendet, die sich an Giraldo et al. [11] orientiert:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\vec{q}) = \mathbf{S}(\vec{q}) \quad (5.1)$$

mit  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ ,  $\vec{q} = (h, hu, hv)^T$ ,

$$\mathbf{F}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 & huv \\ huv & hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{F}_1(\vec{q}) \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_2(\vec{q}) \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_3(\vec{q}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x b \\ -gh\partial_y b \end{pmatrix}.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Untergrund flach und eben ist, d.h.  $b = \text{const.}$ , verschwindet  $\mathbf{S}(\vec{q})$  und das zu lösende Gleichungssystem vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\vec{q}) = 0. \quad (5.2)$$

Das Gleichungssystem (5.2) wird nun wieder mit einer Testfunktion  $\vec{\xi}$  aus dem Funktionenraum  $W$  der gesuchten Funktion  $\vec{q} \in W$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  integriert.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{q}_j}{\partial t} \cdot \vec{\xi} \, d\vec{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}_j(\vec{q}) \cdot \vec{\xi} \, d\vec{x} = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in W \quad (5.3)$$

Auf den zweiten Summanden der Gleichung kann man wieder den Gaußschen Integralsatz anwenden.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{q}_j}{\partial t} \cdot \vec{\xi} \, d\vec{x} - \int_{\Omega} \nabla \vec{\xi} \cdot \mathbf{F}_j(\vec{q}) \, d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_j(\vec{q}) \cdot \vec{\xi} \vec{n} \, ds = 0$$

## 5.2 Diskretisierung des kontinuierlichen Problems

Wie bei der Finite-Elemente-Methode wird das kontinuierliche Problem über die Galerkin-Methode in ein zunächst semi-diskretes Problem umgewandelt.

Gesucht ist dann die Lösung  $\vec{q}_h$  aus einem endlich-dimensionalen Unterraum  $W_h \subseteq W$ , so dass die Gleichung

$$\int_K \frac{\partial \vec{q}_h}{\partial t} \cdot \vec{\xi} \, d\vec{x} - \int_K \nabla \vec{\xi} \cdot \mathbf{F}(\vec{q}_h) \, d\vec{x} + \int_{\partial K} \mathbf{F}(\vec{q}_h) \cdot \vec{\xi} \vec{n} \, ds = 0$$

auf jedem der Elemente  $K$  der Zerlegung von  $\Omega$  erfüllt ist.

Die diskrete Lösung  $\vec{q}_h$  lässt sich über die Basis  $\{\chi_i\}$  mit  $i = 1, \dots, N$  des  $N$ -dimensionalen diskreten Unterraums  $W_h \subseteq W$  darstellen, wobei die Basisfunktionen wieder polynomiale Ansatzfunktionen vom Grad  $k$  sein sollen.

$$\vec{q}_h(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \vec{q}_i(t) \chi_i(\vec{x})$$

Beim Finite-Elemente-Verfahren war gefordert, dass die diskrete Variationsformulierung (4.3a) und (4.3b) für alle Testfunktionen  $\varphi \in V$  gilt. Diese Bedingung muss nun nicht mehr

gewährleistet werden. Beim unstetigen Galerkin-Verfahren reicht es aus, wenn die diskrete Variationsformulierung für alle Testfunktionen  $\vec{\xi}$  aus einem diskreten Ansatzraum  $W_h$  gilt – eine erheblich schwächere Bedingung.

Die Aufgabenstellung lautet damit:

Finde  $\vec{q}_h \in W_h = \mathbb{P}_k^3$ , so dass die Gleichungen

$$\int_K \frac{\partial \vec{q}_h}{\partial t} \cdot \chi_i \, d\vec{x} - \int_K \nabla \chi_i \cdot \mathbf{F}(\vec{q}_h) \, d\vec{x} + \int_{\partial K} \mathbf{F}(\vec{q}_h) \cdot \vec{n} \chi_i \, ds = 0 \quad (5.4)$$

$i = 1, 2, 3$

für alle Basisfunktionen  $\chi_i$  von  $W_h$  gilt.

Da die Gesamtlösung des zu lösenden diskrete Gleichungssystems (5.4) nicht mehr notwendigerweise stetig sein muss, können an den Elementkanten Diskontinuitäten in Form von Sprüngen auftauchen. In Kombination mit der aus physikalischen Gründen geforderten Erhaltung von Impuls und Masse stellt eine solche Diskontinuität ein *Riemann-Problem* dar.

### 5.2.1 Riemann-Problem

Das Riemann-Problem ist ein Anfangswertproblem, bei dem die Anfangswerte konstant sind bis auf einen Punkt. Dort tritt eine Diskontinuität auf. Eine entsprechende physikalische Situation ist zum Beispiel ein Stoßrohr. In einem Rohr befinden sich zwei stationäre Gase, die durch eine Membran voneinander getrennt sind. Die eine Seite hat einen sehr hohen, die andere Seite einen sehr niedrigen Druck. Entfernt man die Membran, wird ein Stoß ausgelöst. In Richtung des Stoßrohrs (niedriger Druck) breitet sich eine Schockwelle aus, die von einer Kontaktdiskontinuität verfolgt wird, an der die Dichte springt. In Richtung des Kompressionsrohrs (hoher Druck) breitet sich dann eine Verdünnungswelle.

Gleichung (5.2) stellt ein solches Riemann-Problem dar. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das System in Ruhe. Für  $x < 0$  hat das System den Zustand  $\vec{q} = \vec{q}_-$ , für  $x > 0$  ist  $\vec{q} = \vec{q}_+$ .

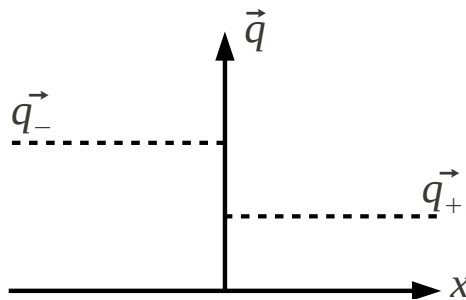


Abbildung 5.1: Startzustände  $\vec{q}_-$  und  $\vec{q}_+$  des Riemann-Problems.

Ein Riemann-Problem hat immer drei Charakteristiken: zwei äußere Charakteristiken, bei denen es sich je nach Problem um Verdünnungswellen und/oder Schockwellen handelt und die dazwischenliegende Kontaktdiskontinuität. Die drei Charakteristiken breiten sich mit Geschwindigkeiten fort, die durch die Eigenwerte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  der Jacobi-Matrix von  $\mathbf{F}(\vec{q})$  bestimmt sind. Die Charakteristiken lassen sich als Funktionen im Phasenraum

darstellen, entlang dieser die Lösung der Differentialgleichung konstant ist. Die Zustände links bzw. rechts der beiden äußeren Charakteristiken sind die Startzustände  $\vec{q}_-$  und  $\vec{q}_+$ . Mit fortschreitender Zeit werden diese immer weiter von der ausganglichen Diskontinuität entfernt und es entstehen Zwischenzustände  $\vec{q}_+^*$  und  $\vec{q}_-^*$ .

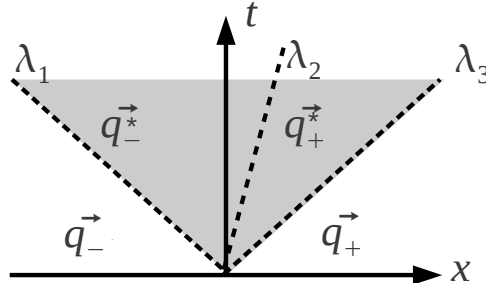


Abbildung 5.2: Zwischen den Zuständen  $\vec{q}_-$  und  $\vec{q}_+$  und der Kontaktdiskontinuität entstehen Zwischenzustände  $\vec{q}_+^*$  und  $\vec{q}_-^*$  (grau). Die Charakteristiken  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  trennen die vier Zustände voneinander.

Zur Lösung des Riemann-Problems ist ein entsprechender Riemann-Löser notwendig. Nicht für jedes Problem existiert ein exakter Löser, bei Nichtvorhandensein einer analytischen Lösung muss stattdessen ein approximierter Riemann-Löser konstruiert werden. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes exakter Löser werden in der Praxis häufig für beide Fälle approximative Löser eingesetzt.

Im Fall der tiefengemittelten zweidimensionalen Flachwassergleichungen hat dieses Problem eine analytische Lösung, ein erster exakter Riemann-Löser stammt von Godunov [12]. Exakte Riemann-Löser erfordern in der Regel einen sehr hohen Rechenaufwand. In der Praxis werden deshalb meist approximative Löser eingesetzt.

### 5.2.2 Numerischer Fluss

Zur Behandlung der Diskontinuitäten in (5.4) wendet man die folgende Vorgehensweise an:

Der physikalische Fluss  $\mathbf{F}(\vec{q}_h)$  durch den Rand des Elementes wird ersetzt durch einen numerischen Fluss  $\mathbf{F}^{(*,l)}$  über die Kanten des Elementes. Die wechselseitige Beeinflussung zweier benachbarter Elemente wird allein durch diesen numerischen Fluss beschrieben, er stellt also den lokalen Informationsaustausch zweier Elemente dar.

Setzt man eine Zerlegung in dreieckige Elemente  $K$  mit den drei Kanten  $\Gamma_K$  voraus, hat sich die Aufgabenstellung wie folgt verändert:

$$\int_K \frac{\partial \vec{q}_h}{\partial t} \chi_i \, d\vec{x} - \int_K \nabla \chi_i \cdot \mathbf{F}(\vec{q}_h) \, d\vec{x} - \sum_{l=1}^3 \int_{\Gamma_K} \mathbf{F}^{(*,l)} \chi_i \cdot \vec{n}^{(K,l)} \, ds = 0 \quad (5.5)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Der Normalenvektor  $\vec{n}^{(K,l)}$  ist der Vektor, der vom Element  $K$  zum Kantennachbar  $l$  zeigt. Gleichung (5.5) ist eine semi-diskrete, schwache Formulierung des kontinuierlichen Problems. Diese Gleichung wird nun noch einmal partiell über  $K$  integriert. Man erhält

eine *starke Formulierung*.

$$\int_K \chi_i \left( \frac{\partial \vec{q}_h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\vec{q}_h) \right) d\vec{x} = \sum_{l=1}^3 \int_{\Gamma_K} \chi_i \cdot \vec{n}^{(K,l)} (\mathbf{F}(\vec{q}_h) - \mathbf{F}^{(*,l)}) ds \quad (5.6)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Giraldo et al. [11] haben bereits darauf hingewiesen, dass, obwohl beide Formen mathematisch äquivalent sind, andere numerische Ergebnisse erzielt werden, wenn mit der *starken Formulierung* an Stelle der *schwachen Formulierung* gerechnet wird. In dieser Arbeit wird dennoch ausschließlich die starke, schwache Formulierung verwendet, da diese im Hinblick auf die später verwendete Adaptivität günstigere Eigenschaften hat.

Zur Bestimmung des numerischen Flusses  $\mathbf{F}^{(*,l)}$  zwischen zwei Zellen wurde der *Rusanov-Fluss* verwendet.

### 5.2.3 Der numerische Fluss nach Rusanov

Mit Hilfe des Rusanov-Lösers [13] lässt sich eine approximierte Lösung des Riemann-Problems finden. Er stellt eine sehr einfache Formulierung für den numerischen Fluss an der Grenzfläche zwischen zwei Elementen dar. Der Fluss wird berechnet als Summe der Differenz der Werte beidseitig der Grenze und der maximalen auftretenden Wellengeschwindigkeit an der Grenzfläche. Diese entspricht dem Maximum der  $i$  Eigenwerte  $\lambda_i$  der Jacobi-Matrix von  $\mathbf{F}(\vec{q})$ .

$$\mathbf{F}^{(*,l)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}(\vec{q}_h^{(K)}) + \mathbf{F}(\vec{q}_h^{(l)}) - \frac{1}{2} \left| \lambda \left( \frac{(\vec{q}_h^{(K)} - \vec{q}_h^{(l)})}{2} \right) \right| (\vec{q}_h^{(l)} - \vec{q}_h^{(K)}) \right].$$

$\mathbf{F}$  stellt dabei nach wie vor die physikalische Flussfunktion aus (5.1) dar.

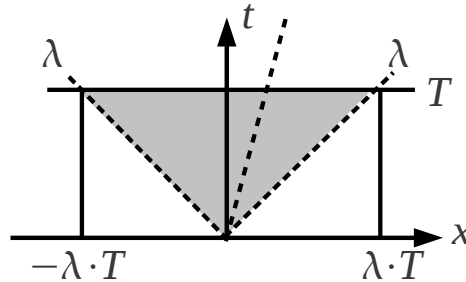


Abbildung 5.3: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Zwischenzustände  $\vec{q}_\pm^*$  (grau) ist begrenzt durch die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\lambda$  der Charakteristiken.

Physikalisch gesehen ist  $\lambda = \max_{i=1,2,3} (\lambda_i)$  definiert durch den Betrag der maximalen Wellengeschwindigkeit. Im Fall der Flachwassergleichungen gilt

$$|\lambda(\vec{q})| = |u| - \sqrt{gh}.$$

Vorteile des Rusanov-Solvers sind dessen einfache Implementierung, sowie der relativ geringe Rechenaufwand. Von Nachteil ist seine hohe Dissipativität: Die Dissipation ist üblicherweise proportional zur Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da der Rusanov-Solver von der

maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit ausgeht, überschätzt er die tatsächliche Ausbreitungsgeschwindigkeit jedoch systematisch.

Eine Verbesserung bietet hier der Roe-Solver [14]. Dieser bestimmt die tatsächlich auftretenden Wellengeschwindigkeiten  $\lambda_i$  über eine linearisierte Jacobi-Matrix von  $\mathbf{F}$ . Zum Zeitpunkt der Diplomarbeit war dieser bereits in StormFlash implementiert, aber noch nicht einsatzfähig. Eine detaillierte Beschreibung unterschiedlicher Riemann-Solver und deren Eigenschaften findet sich in Toro [15].

#### 5.2.4 Diskretisierung des Gebiets

Das Gebiet  $\Omega$  wird zerlegt in dreieckige Lagrangeelemente. Die Diskretisierung erfolgt dann wieder über die Galerkin-Methode

$$\vec{q}_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \vec{q}_j(t) \chi_j(\vec{x}).$$

Auf den Elementen werden sowohl für die Geschwindigkeit als auch für die Höhe lineare Ansatz- und Testfunktionen verwendet. Eine Begründung dieser Wahl findet sich in Kapitel 6.

#### 5.2.5 Diskretisierung der Zeit

Die zeitliche Integration erfolgt über ein explizites, *strong stability preserving* Runge-Kutta-Verfahren. Dazu muss die semi-diskrete Formulierung (5.6) zunächst in Matrix-Schreibweise umgeformt werden. Einsetzen der diskreten Lösung  $\vec{q}_h$  in das semi-diskrete Variationsproblem (5.6) ergibt

$$\begin{aligned} \int_K \chi_i \chi_j \, d\vec{x} \frac{\partial \vec{q}_j}{\partial t} + \int_K \chi_i \nabla \chi_j \, d\vec{x} \mathbf{F}(\vec{q}_j) \\ = \sum_{l=1}^3 \int_{\Gamma_K} \chi_i \chi_j \vec{n}^{(K,l)} \, ds (\mathbf{F}(\vec{q}_j) - \mathbf{F}_j^{(*,l)}) \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Durch die Definition von Elementmatrizen

$$A_{ij}^{(K)} = \int_K \chi_i \chi_j \, d\vec{x} \quad (5.7a)$$

$$A_{ij}^{(K,l)} = \int_{\Gamma_K} \chi_i \chi_j \vec{n}^{(K,l)} \, d\vec{x} \quad (5.7b)$$

$$B_{ij}^K = \int_K \chi_i \nabla \chi_j \, d\vec{x} \quad (5.7c)$$

lässt sich das Gleichungssystem elegant in Matrixform schreiben

$$A_{ij}^{(K)} \frac{\partial q_j}{\partial t} + (B_{ij}^K)^T \mathbf{F}(\vec{q}_j) = \sum_{l=1}^3 (A_{ij}^{(K,l)})^T (\mathbf{F}(\vec{q}_j) - \mathbf{F}_j^{(*,l)}).$$

Diese Gleichung kann man weiter normieren mit der Matrix  $A^{(K)}$ . Mit  $\hat{A}^{(K,l)} = (A^{(K)})^{-1} A^{(K,l)}$  und  $\hat{B}^{(K)} = (M^{(K)})^{-1} B^{(K)}$  erhält man

$$\frac{\partial \vec{q}_j}{\partial t} + (\hat{B}_{ij}^K)^T \mathbf{F}(\vec{q}_j) = \sum_{l=1}^3 (\hat{A}_{ij}^{(K,l)})^T (\mathbf{F}(\vec{q}_j) - \mathbf{F}_j^{(*,l)}) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.8)$$

Die numerische Auswertung der Integrale in (5.7a) bis (5.7c) erfolgt über eine *Gauß-Lobatto-Quadratur*.



### Gauß-Quadratur

Zur Auswertung des Integrals einer Funktion  $f(x)$  auf einem Intervall  $[a, b]$  wird die zu integrierende Funktion aufgeteilt in eine Gewichtungsfunktion  $w(x)$  und eine stetige Funktion  $\phi(x)$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b w(x)\phi(x)dx$$

$\phi(x)$  wird an speziellen Auswertepunkte  $x_i$  durch ein Polynom  $P_n$  vom Grad  $n$  approximiert. Das Polynom lässt sich wiederum exakt integrieren,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b w(x)\phi(x)dx \\ &\approx \int_a^b w(x)P_n(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei  $\alpha_i$  Gewichte sind. Die Integration ist exakt für Polynome der Ordnung  $2n - 1$ ,  $n$  ist die Anzahl der Auswertestellen.

Eine Variante der Gauß-Quadratur ist die Gauß-Lobatto-Quadratur, die exakt ist für Polynome der Ordnung  $2n - 3$ . Im Vergleich zur Standard Gauß-Quadratur hat die Gauß-Lobatto-Quadratur den Vorteil, dass die Endpunkte des Intervalls direkt mit ausgewertet werden.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{2}{n(n-1)}[f(a) + f(b)] + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) + R_n. \quad (5.10)$$

Die Stützstellen  $x_i$  sind definiert durch die Nullstellen von  $P'_{n-1}(x)$ . Die Gewichte  $w_i$  berechnen sich aus

$$w_i = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2} \text{ mit } x_i \neq \pm 1, \quad (5.11)$$

der Rest  $R_n$  ist

$$R_n = \frac{-n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi) \text{ mit } -1 < \xi < 1. \quad (5.12)$$

### Runge-Kutta-Verfahren

Die Gleichung in Matrix-Schreibweise (5.8) lässt sich als gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial \vec{q}_j}{\partial t} = R(\vec{q}_j)$$

mit  $R(\vec{q}_j) = \sum_{l=1}^3 (\hat{A}_{ij}^{(K)})^T (\mathbf{F}_j(\vec{q}_j) - \mathbf{F}_j^{(*,l)}) - (\hat{B}_{ij}^{(K)})^T \mathbf{F}_j(\vec{q}_j)$  schreiben.

Die Lösung  $\vec{q}_j$  eines  $S$ -stufigen Runge-Kutta-Verfahrens zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ist dann gegeben durch

$$\vec{q}_j(t_k) = \alpha_0^k \vec{q}_j(t_n) + \alpha_1^k \vec{q}_j(t_{k-1}) + \alpha_2^k \vec{q}_j(t_{k-3}) + \beta^k \Delta t R(\vec{q}_j(t_{k-1}))$$

für  $k = 1, \dots, S$  mit  $\vec{q}_j(t_0) = \vec{q}_j(t_n)$  und  $\vec{q}_j(t_S) = \vec{q}_j(t_{n+1})$ .

Verwendet wird das zweistufige Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2, die entsprechenden Koeffizienten finden sich in Tabelle 5.1.

| $k$ | $\alpha_0^k$ | $\alpha_1^k$ | $\alpha_2^k$ | $\beta^k$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|-----------|
| 1   | 1.0          | 0.0          | 0.0          | 1.0       |
| 2   | 0.5          | 0.5          | 0.0          | 0.5       |

Tabelle 5.1: Koeffizienten des expliziten zweistufigen Runge-Kutta-Verfahrens der Ordnung 2.

## 6. Gegenüberstellung HiFlow und StormFlash

Im vorherigen Kapitel wurden die numerischen Grundlagen der beiden verwendeten Software-Pakete HiFlow und StormFlash vorgestellt. Dabei wurde klar, dass sich die numerischen Methoden der beiden Verfahren in vielerlei Hinsicht voneinander unterscheiden. Es stellt sich natürlich die Frage, inwiefern es sinnvoll ist, HiFlow und StormFlash direkt miteinander zu vergleichen.

HiFlow basiert auf den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, gerechnet wird auf einem Viereck-Gitter mit Taylor-Hood-Elementen. Unstetigkeiten zwischen den Elementen sind nicht erlaubt. Als Zeitschrittverfahren dient das implizite  $cGP(1)$ -Verfahren.

In StormFlash wird eine diskrete Variationsformulierung der Flachwassergleichungen gelöst, gerechnet wird auf einem Dreieck-Gitter mit linearen Ansatz- und Testfunktionen. Zwischen den Elementen sind Unstetigkeiten erlaubt. Das Zeitschrittverfahren ist ein explizites zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2.

Obwohl verschiedene Gleichungen auf verschiedene Arten diskretisiert werden, lässt sich an vielen Stellen trotzdem ein qualitativer Vergleich durchführen. Dieser Vergleich kann jedoch nur als Sensibilisierung für auftretende Probleme in der Simulation von Wirbelstürmen betrachtet werden, keinesfalls als generelles Urteil.

Die Unterschiede in den verwendeten Modellgleichungen und Diskretisierungen sind darüber hinaus nicht die einzigen Differenzen, die zwischen den beiden Modellen bestehen. Die Szenarien-spezifische Anwendung in Kapitel 7 macht weitere Kompromisse unumgebar, welche die Wahl von Anfangs- und Randwerten, physikalische und numerische Reibung und die verwendeten Finiten Elemente betreffen.

Um vorab einen Überblick zu geben, sind die unterschiedlichen Eigenschaften der beiden verwendeten Modelle in Tabelle 6.1 zunächst aufgelistet.

### 6.1 Anfangswerte

In den Simulationen mit HiFlow ist nur die Vorgabe von Anfangswerten für die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  notwendig. Diese sind festgelegt durch die Beiträge des

|                            | HiFlow                                       | StormFlash                                  |
|----------------------------|--|---|
| <b>Physik</b>              |  |   |
| Modellgleichung            | Navier-Stokes-Gleichungen                    | Flachwassergleichungen                      |
| Kompressibilität           | inkompressibel                               | inkompressibel                              |
| Viskosität                 | $\nu = 5 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$    | –   |
| Randbedingungen            | periodisch                                   | Dirichlet                                   |
| Prognostische Variablen    | $\vec{u} = (u_x, u_y)^T, p$                  | $\vec{q} = (h \cdot u_x, h \cdot u_y, h)^T$ |
| <b>Numerik</b>             |  |   |
| Triangulierung             | Quadrate                                     | Dreiecke                                    |
| Test- und Ansatzfunktionen | Taylor-Hood-Element<br>$Q_2 - Q_1$           | lineare Lagrange-Elemente<br>$P_1$          |
| Zeitschrittverfahren       | Kapitel 7: cGP(1),<br>Kapitel 9: Runge-Kutta | RK22  |
| <b>Adaptivität</b>         |  |   |
| Gitterverfeinerung         | reguläre Verfeinerung                        | Bisektion                                   |
| Adaptions-Technik          | h-Adaptivität                                | h-Adaptivität                               |

Tabelle 6.1: Übersicht über die verwendeten Software-Pakete HiFlow und StormFlash.

Hintergrunddrifts und des Wirbelprofils bzw. der Wirbelprofile. Der Hintergrunddrift ist definiert durch ein konstantes Geschwindigkeitsprofil mit einem Betrag von 10 m/s in positive x-Richtung.

Um das dynamische Verhalten eines tropischen Wirbelsturms zu untersuchen, genügt eine idealisierte Darstellung des Wirbels, wie sie auch bei Scheck et al. [16] Verwendung findet.

In dieser Diplomarbeit wird die Darstellung gemäß Smith et al. [17] verwendet, der so genannte SUD Wirbel. Durch eine geeignete Wahl der Parameter entsprechen diese der Ausdehnung und Intensität einer tropischen Zyklone. Definiert wird dieser Wirbel durch seine tangentielle Geschwindigkeit

$$v_T = v_0 \frac{s[1 + \frac{6b}{2a}s^4]}{(1 + as^2 + bs^6)^2}, \quad (6.1)$$

mit  $a = 0.3398$ ,  $b = 5.377 \cdot 10^{-4}$  und  $s = r/r_0$ .  $r$  definiert den radialen Abstand vom

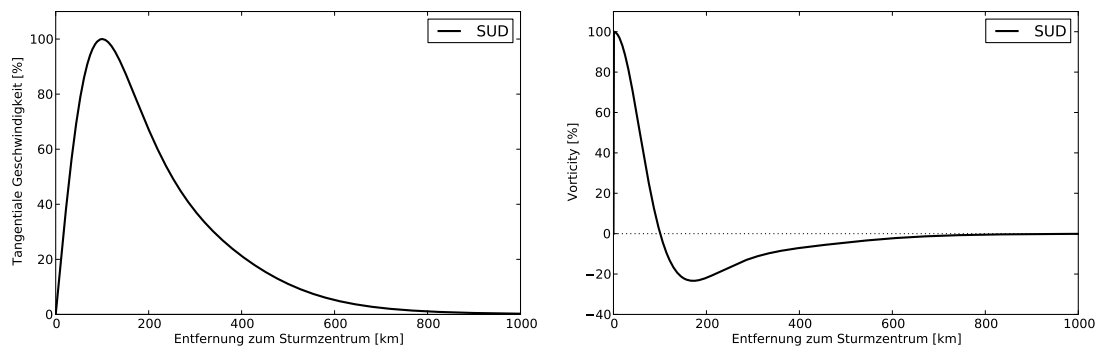


Abbildung 6.1: Geschwindigkeits- und Vorticity-Profil des SUD-Wirbels nach Smith et al. [[17]].

Wirbelzentrum. Als  $r_o$  werden 100 km gewählt, die Tangentialgeschwindigkeit  $v_0$  beträgt 71.521 m/s, woraus sich eine maximale Tangentialgeschwindigkeit  $v_T$  von 40 m/s ergibt.

Für große Abstände vom Sturmzentrum wird das Vorticityprofil des SUD Wirbels negativ. Der äußere Teil des Wirbels schirmt so die positive Zirkulation ab, die den eigentlichen Wirbel definiert. Dadurch wird erreicht, dass die Geschwindigkeit wie bei realen Stürmen für große Radien schneller als mit  $1/r$  abfällt.

In HiFlow fungiert der Druck  $p$  als Lagranger Multiplikator, der die Nebenbedingung der Divergenzfreiheit an das eigentliche Problem koppelt. Anfangswerte müssen deshalb nicht vorgegeben werden.

Bei der Berechnung auf Basis der Flachwassergleichung müssen neben den Anfangswerten für die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  – die wie bei den Navier-Stokes-Gleichungen festgelegt sind – auch Anfangswerte für die Höhe  $h$  vorgegeben werden.

Damit ein Wirbel stabil ist, muss

$$\frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{t_0} = \frac{v_T}{g \cdot r} \quad (6.2)$$

gewährleistet sein. Die Beziehung ergibt sich nach Transformation der Flachwassergleichung in Polarkoordinaten und Annahme von Stationarität.

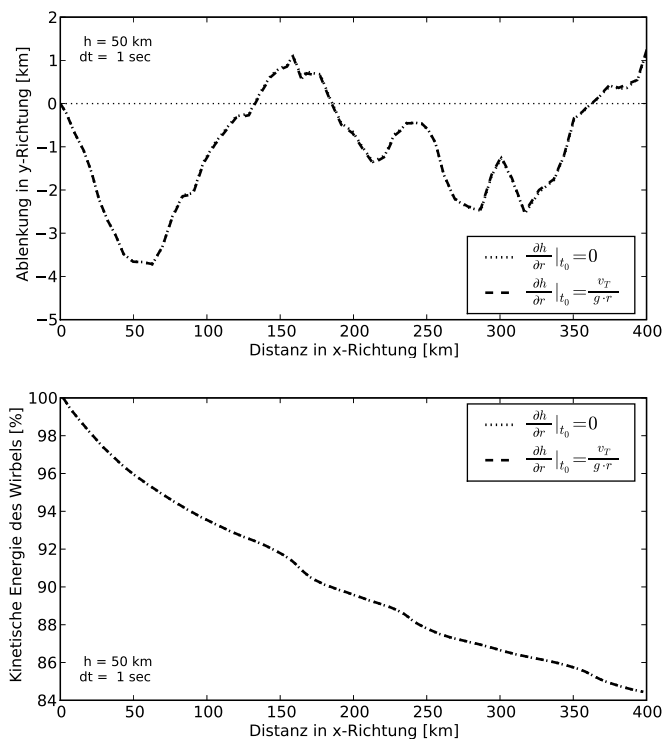


Abbildung 6.2: Einfluss der Wahl der Anfangswerte für die Höhe  $h(r, t_0)$  auf die Zugbahn des Wirbels (oben) und die Änderung der kinetischen Energie des Wirbels (unten).

Bei der Integration von Gleichung (6.2) über  $r$  erhält man

$$h(r, t_0) = \int_0^r \frac{v_T}{g \cdot r} dr + H_0 \quad (6.3)$$

und eine zunächst unbestimmte Integrationskonstante  $H_0$  taucht auf. Ein gängiger Wert für  $H_0$  bei der Simulation von Wirbelstürmen ist 10 km, eine ausführliche Erklärung dazu findet sich in Abschnitt 6.4.

Bei einer Höhe  $H_0$  von 10 km ist der Beitrag des Integrals  $\int_0^r \frac{v_T}{g \cdot r} dr$  wiederum vernachlässigbar, das Wirbelprofil ist auch ohne diesen Beitrag stabil. Der Beitrag hat insbesondere keinen Einfluss auf die später betrachtete Zugbahn oder die kinetische Energie eines Wirbels, wie in Abbildung 6.2 sichtbar ist. Der Wirbel ist hier eingebettet in einen konstanten Westwind mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s, welcher den Wirbel in Richtung Osten advehiert.

Als Anfangswert wurde deshalb  $h(r, t_0) = 10$  km gewählt.

## 6.2 Randwerte

Anhand des Sturmprofils in Abbildung 6.1 ist ersichtlich, dass die tangentielle Geschwindigkeit asymptotisch gegen Null geht. Erst ab einem Abstand zum Sturmzentrum von etwa 750 km in der Startlösung sind Randeffekte vernachlässigbar.

In StormFlash kann aus technischen Einschränkungen derzeit nur mit Dirichlet-Rändern gerechnet werden. Die Geschwindigkeitskomponenten an den Rändern entsprechen dabei den Geschwindigkeitskomponenten des Hintergrunddrifts. Bei einem Abstand von 800 km zum Rand treten bei der Verwendung von obigem Wirbelprofil unerwünschte Instabilitäten in Randnähe auf. Grund dafür ist die nur asymptotisch gegen Null gehende tangentielle Geschwindigkeit. Am Rand wird das Geschwindigkeitsprofil des Wirbels aufgrund der Dirichlet-Ränder auf Null gesetzt, hier existieren nur noch die Beiträge des Hintergrunddrifts. In Randnähe gibt es also Unstetigkeiten, die zu großen Vorticity-Gradienten führen können. Um diese Unstetigkeiten zu verhindern, wird die tangentielle Geschwindigkeit des Wirbelprofils in der Startlösung gemäß Jones et al. [[18]] mit einer Funktion  $\varepsilon(r)$  multipliziert, die die Geschwindigkeit zum Rand hin geglättet

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{(r-r_{cut})^2}{r_{wid}^2}\right), & r \leq r_{cut} \\ 0, & r > r_{cut}. \end{cases}$$

Ist  $r_{cut}$  groß genug, so wird der Vorticity-Gradient langsam auf Null reduziert, die Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit verschwinden. Als  $r_{cut}$  wurden 750 km gewählt,  $r_{wid} = 100$  km.

In HiFlow wird mit periodischen Rändern gerechnet. Um vergleichbare Simulationen zu den StormFlash-Simulationen zu erhalten wird der Wirbel nicht periodisch fortgesetzt, sondern an den entsprechenden Grenzen abgeschnitten. Dann entstehen Unstetigkeiten im Geschwindigkeitsfeld. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden die Werte in Randnähe deshalb gemäß Abbildung 6.3 ersetzt durch gewichtete Mittel der Werte beiderseits der Gebietsgrenzen.

Befindet sich das Sturmzentrum in der Startlösung sehr nahe am Rand, so entstehen auf diese Weise unerwünschte Artefakte: Bei einem zyklonalen Wirbel zum Beispiel, der

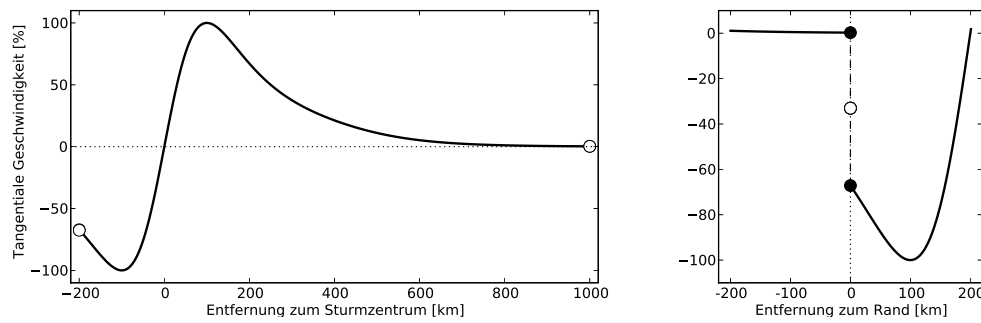


Abbildung 6.3: Geschwindigkeitsprofil des SUD-Wirbels. Bei  $t = 0$  werden Randwerte als gewichtetes Mittel der Werte beiderseits des Randes berechnet. HiFlow.

bei  $x_0 = 200$  km,  $y_0 = 200$  km startet und sich in positive  $x$ - und positive  $y$ -Richtung fortbewegt, entstehen negative Vorticitymaxima an den Rändern bei  $x = 0$  km und  $y = 0$  km.

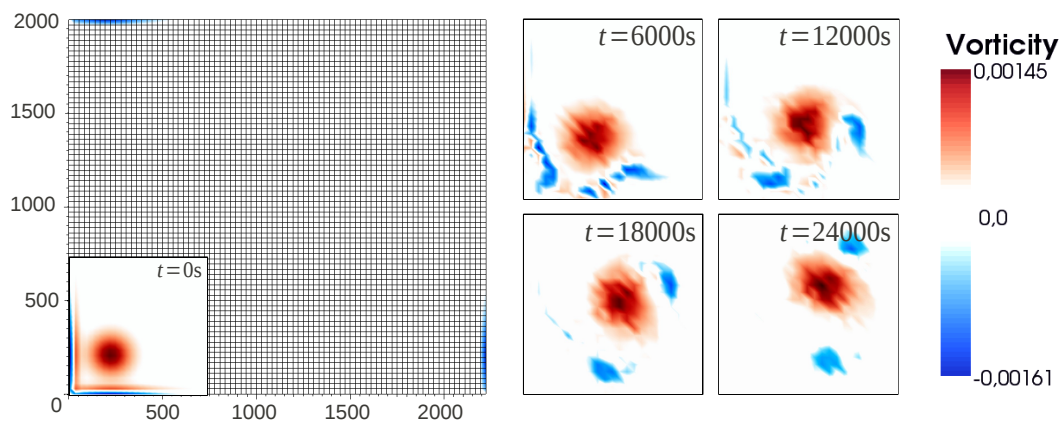


Abbildung 6.4: Interaktion des positiven Vorticitymaximums (rot) mit negativen Vorticitymaxima (blau) an den Rändern. Abstand des Wirbels vom Rand  $200$  km. HiFlow,  $h = 27.8$  km.

Simulationen mit einem Abstand kleiner als  $750$  km haben gezeigt, dass diese Vorticitymaxima an den Rändern weitere Wirbel bilden können, die mit dem eigentlichen Wirbel interagieren. In obigem Beispiel entstehen dann zwei Wirbel negativer Vorticity.

### 6.3 Finite Elemente

In HiFlow wird mit *inf-sup*-stabilen Taylor-Hood-Elementen (siehe Abschnitt 4.2.1) gerechnet. Die Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitskomponenten sind biquadratisch, gerechnet wird auf Viereck-Elementen. Um einen sinnvollen Vergleich zwischen StormFlash und HiFlow ziehen zu können, wäre die Verwendung (bi-)quadratischer Ansatzfunktionen auf einem Gitter mit quadratischen Viereck-Elementen sinnvoll. Zum Zeitpunkt der Durchführung der Simulationen mit StormFlash war weder der Einsatz quadratischer Funktionen, noch die Verwendung von Viereck-Elementen möglich, der Einsatz von Dreieckelementen in HiFlow war ebenfalls nicht möglich. In StormFlash wird trotzdem ausgewichen auf Dreieckelemente, die Ansatz- und Testfunktionen stammen aus dem Raum linearer Funktionen  $P_1$ . Damit effektiv die gleiche Gitterweite verglichen wird, werden die StormFlash-Simulationen bei halbiertem Gitterweite, also doppelter Auflösung berechnet, sodass gewährleistet ist, dass zumindest die Lage der Freiheitsgrade übereinstimmen (siehe Abbildung 6.5).

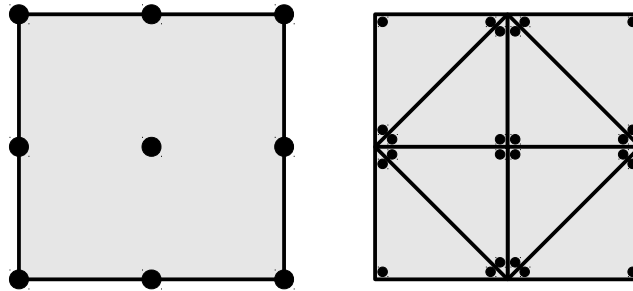


Abbildung 6.5: Effektive Gitterweite: Biquadratische Funktion auf quadratischem Element in HiFlow (links), lineare Funktionen doppelter Gitterauflösung auf Dreieckelementen in StormFlash (rechts).

Durch die erlaubten Unstetigkeiten in den Test- und Ansatzfunktionen in StormFlash hat jedes Dreieckelement mit linearen Funktionen genau drei elementeigene Freiheitsgrade. Anders als bei einem stetigen Verfahren gibt es keine gemeinsamen Freiheitsgrade zweier Elemente. In obigem Beispiel wird schnell deutlich, dass die Anzahl der Freiheitsgrade in StormFlash also wesentlich größer sein muss als in HiFlow für eine Simulation mit der selben effektiven Gitterweite. Als grober Richtwert gilt der Faktor 3: für die gleiche effektive Gitterweite hat ein Problem, das mit einem unstetigen Galerkin-Verfahren mit linearen Elementen auf einem Dreieck-Gitter gerechnet wird, dreimal so viele Freiheitsgrade wie bei der Berechnung auf einem Viereck-Gitter mit biquadratischen Funktionen.

Wird seriell gerechnet, fällt die dreimal so große Anzahl an Freiheitsgraden schnell ins Gewicht, die Rechenzeit wird sich deutlich erhöhen. Nicht aber, wenn parallel gerechnet wird: das unstetige Verfahren kann als eine Vielzahl von elementweisen Berechnungen aufgefasst werden. Diese sind parallel durchführbar, die Kommunikation zwischen den Elementen wird anschließend in Form des numerischen Flusses bewerkstelligt. Beim stetigen Verfahren sind die einzelnen Elemente über ihre Basisfunktionen direkt miteinander gekoppelt. Auch hier können parallel elementweise Rechnungen erfolgen, der Grad der Kopplung ist jedoch wesentlich höher als beim unstetigen Verfahren. Bei den unstetigen Verfahren lässt sich der



Kopplungsgrad über die Definition des numerischen Flusses direkt steuern. Bei der Parallelisierung kann ein niedrigerer Kopplungsgrad dann zum Vorteil werden.

Zur Zeit der Durchführung der Simulationen war StormFlash jedoch nur seriell ausführbar.

## 6.4 Stabilität

Die Stabilität des Verfahrens ist abhängig von der Viskosität, der räumlichen Gitterauflösung und der Zeitschrittweite.

### 6.4.1 Numerische Dissipation

In HiFlow setzt sich die Viskosität zusammen aus der physikalischen, kinematischen Viskosität und einer verfahrenseigenen, numerischen Dissipation. Die numerische Dissipation hat eine stabilisierende Wirkung auf das Verfahren und hat die Form eines Reibungstermes. Sie beschreibt Energieverluste durch numerische Effekte und hängt ab von der Gitterweite und der Zeitschrittweite.

Die verfahrenseigenen Energieverluste in StormFlash sind im Vergleich mit HiFlow wesentlich größer. Quellen dieser großen verfahrenseigenen Verluste können zum einen der verwendete Rusanov-Solver (siehe Abschnitt 5.2.3), zum anderen auch die linearen Elemente sein. Durch den Einsatz linearer Elemente erhält man ein Verfahren 2. Ordnung, dank der in HiFlow verwendeten Taylor-Hood-Elemente handelt es sich dort um ein Verfahren 3. Ordnung bezüglich der Geschwindigkeit und 2. Ordnung bezüglich des Drucks. Aus diesem Grund wurde in StormFlash komplett auf eine zusätzliche physikalische Viskosität verzichtet. Der Energieverlust entspricht dann in etwa dem, der sich bei Simulationen mit HiFlow mit der selben effektiven Gitterweite und einer Viskosität von  $5 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$  ergibt.

### 6.4.2 Gitterauflösung

Die größte Gitterauflösung, bei der mit HiFlow mit einer Viskosität von  $5 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$  noch stabile Rechnungen durchgeführt werden können, ist eine Auflösung von 50 km bei einer Zeitschrittweite von 300 s. Die feinste verwendete Gitterauflösung entspricht einer Gitterweite von 12.5 km.

Die entsprechende Gitterweite in StormFlash ist jeweils halb so groß, die Auflösung also doppelt so hoch. Die grobe Gitterweite beträgt 25 km, die feine 6.25 km.

### 6.4.3 Zeitschrittweite

Die verwendete Zeitschrittweite in HiFlow beträgt 300 s. Bei dieser Zeitschrittweite können problemlos stabile Simulationen durchgeführt werden.

In StormFlash muss mit Zeitschritten von 0.5 s gerechnet werden. Eine Ursache dafür ist die Verwendung eines expliziten Zeitschrittverfahrens in StormFlash (siehe Abschnitt 5.2.5), während in HiFlow ein implizites Verfahren verwendet wird (siehe Abschnitt 4.2.2). Die Hauptursache dafür sind jedoch hochfrequente Schwerewellen, die bei der Lösung der Flachwassergleichungen auftauchen. Ein Zusammenhang zwischen der Zeitschrittweite und der Stabilität findet sich über das CFL-Kriterium.

### CFL-Kriterium

Das CFL-Kriterium ist definiert durch den Quotienten aus physikalischer und numerischer Ausbreitungsgeschwindigkeit. Es gibt an, um wie viele Zellen sich eine betrachtete Größe pro Zeitschritt maximal fortbewegen darf. Wird es verletzt, so erfolgt der numerische Informationsfluss schneller als der physikalische und das Verfahren wird instabil. Je nach Verfahren ergeben sich unterschiedliche CFL-Zahlen. Für die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen lautet das Kriterium

$$CFL_{NSG} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (|u| + |v|).$$

Bei der Simulation der der Flachwassergleichung treten externe Schwerewellen als Lösung auf. Diese breiten sich mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{gh}$  fort, im CFL-Kriterium muss das berücksichtigt werden.

$$CFL_{FWG} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (|u| + |v| + \sqrt{gh}).$$

Wird das Kriterium verletzt, werden die Wellen nicht mehr richtig aufgelöst, das Verfahren wird instabil.

Prinzipiell ist das CFL-Kriterium für die Flachwassergleichungen also wesentlich höher als das für die Navier-Stokes-Gleichungen. Erst wenn  $h = 0$  ist, stimmen beide Kriterien überein. Vom mathematischen Blickwinkel her, macht es also Sinn,  $h(r, t_0)$  so klein wie möglich zu wählen.

Nicht aber aus physikalischer Sicht. Damit es sich annäherungsweise um ein physikalisch zweidimensionales Modell handelt, muss  $h(r, t_0)$  entsprechend der ersten Gleichung der Flachwassergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0 \\ \partial_t h + h \cdot (\partial_x u + \partial_y v) + u \cdot \partial_x h + v \cdot \partial_y h &= 0 \end{aligned}$$

so groß wie möglich gewählt werden. Erst dann ist die Änderung von  $h$  vernachlässigbar, obige Gleichung vereinfacht sich zu  $\partial_x u + \partial_y v = 0$  und das Modell ist barotrop. Die Wahl von  $h(r, t_0)$  ergibt sich also aus einem Kompromiss zwischen angestrebter Barotropie und möglichst großer Zeitschrittweite. Wie bereits in Abschnitt 6.1 beschrieben, wird eine konstante Anfangshöhe von  $h(r, t_0) = 10$  km gewählt.

Generell muss die Zeitschrittweite für das auf den Flachwassergleichungen basierende Modell also wesentlich geringer sein, als im Navier-Stokes-basierten Modell. Wie schon die erhöhte Anzahl an Freiheitsgraden haben auch die erforderlichen kurzen Zeitschritte eine maßgebliche Auswirkungen auf die Rechenzeit.

## 7. Numerische Tests I

In einem ersten Szenario soll untersucht werden, ob ein adaptiertes Gitter Einfluss auf die korrekte Darstellung der Physik des simulierten Problems ausübt. Betrachtet wird ein Wirbelsturm, der Gebiete unterschiedlicher Gitterauflösung passiert. Der Wirbelsturm wird von der ihn umgebenden Hintergrundströmung unter unterschiedlichen Winkeln auf eine Grenze in der Gitterauflösung getrieben. In Abhängigkeit vom Auftreffwinkel und von der Gitterauflösung interessieren dabei die Änderungen der Zugbahn und der Intensität.

Die betrachteten Szenarien werden sowohl mit HiFlow als auch mit StormFlash simuliert, nachdem die beiden Software-Pakete im vorherigen Kapitel bereits im Hinblick auf ihre numerischen und physikalischen Eigenschaften verglichen wurden, folgt in diesem Kapitel ein Vergleich im Hinblick auf die Ergebnisse der numerischen Simulationen und den notwendigen Rechenaufwand.

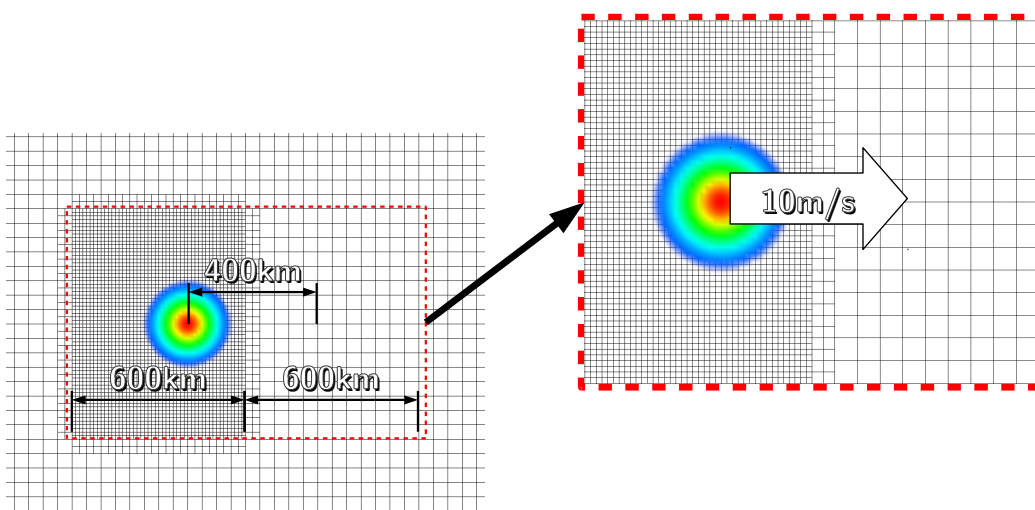


Abbildung 7.1: Modell-Szenario in HiFlow,  $h_{fein} = 12.5$  km,  $h_{grob} = 50$  km.

## 7.1 Modell-Szenario: Sturm vs. Gittergradient

Als Rechengebiet wurde ein Gebiet der Größe  $2000 \text{ km} \times 1600 \text{ km}$  gewählt. Die Geometrie des Gebiets ergab sich als Kompromiss zwischen einer möglichst geringen Anzahl an Freiheitsgraden bei der numerischen Berechnung und einem Mindestabstand von  $750 \text{ km}$  vom Sturmzentrum zu den Rändern. In den mit HiFlow durchgeführten Simulationen werden periodische Ränder verwendet, in StormFlash wird mit Dirichlet-Ränder gerechnet.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das Zentrum des Wirbels an der Startposition ( $x_0 = 800 \text{ km}$ ,  $y_0 = 800 \text{ km}$ ).

Das Rechengebiet ist unterteilt in einen Bereich grober und einen Bereich feiner Auflösung. Die Grenze zwischen den beiden Bereichen variiert je nach betrachtetem Auftreffwinkel, verläuft aber immer durch den Punkt ( $x_{Grenze} = 1000 \text{ km}$ ,  $y_{Grenze} = 800 \text{ km}$ ). Der Wirbel erreicht die Grenze in jeder Simulation also nach  $200 \text{ km}$  zurückgelegter Distanz in positive x-Richtung.

Hat der Wirbel  $400 \text{ km}$  in positive x-Richtung zurück gelegt, so ist die Simulation beendet.

### Gitterauflösung

Bei den hier beschriebenen, in den Abschnitten 7.2 und 7.3 analysierten Szenarien liegen jeweils zwei Verfeinerungsstufen zwischen dem groben ( $50 \text{ km}$  in HiFlow,  $25 \text{ km}$  in StormFlash) und dem feinen ( $12.5 \text{ km}$  in HiFlow,  $6.25 \text{ km}$  in StormFlash) Gitter. In HiFlow wurden zunächst Simulationen auf einem adaptierten Gitter mit  $25 \text{ km}$  und  $12.5 \text{ km}$  Gitterweite durchgeführt, also mit einer Verfeinerungsstufe Unterschied. Die dabei beobachteten, später beschriebenen Effekte in den Änderungen der Zugbahn und der kinetischen

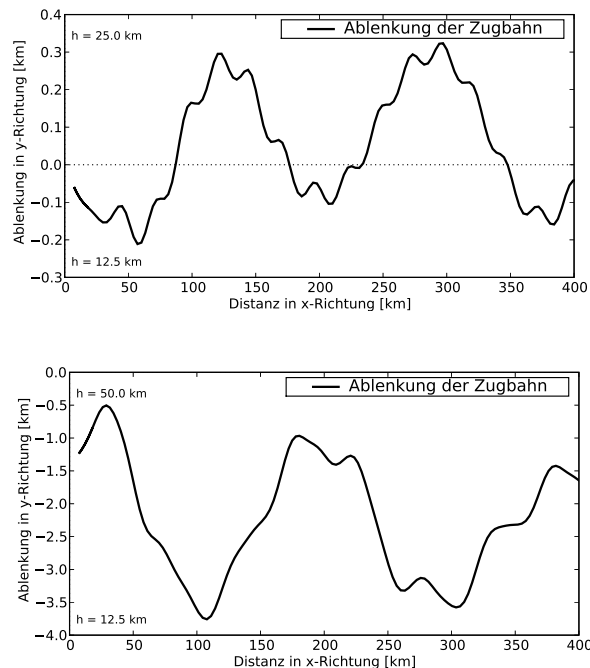


Abbildung 7.2: Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Gitterauflösungen. Bewegung entlang der Grenze, Ablenkung von der erwarteten Zugbahn (siehe Abschnitt 7.2). HiFlow,  $h_{fein} = 12.5 \text{ km}$ ,  $h_{grob} = 25 \text{ km}$  (oben); HiFlow,  $h_{fein} = 12.5 \text{ km}$ ,  $h_{grob} = 50 \text{ km}$  (unten).

Energie des Wirbels entsprechen qualitativ denen, die bei Simulationen mit zwei Verfeinerungsstufen Unterschied auftraten. Beim einfachen Unterschied sind diese Effekte jedoch weniger stark ausgeprägt, wie in den folgenden zwei Beispielen sichtbar wird.

Als erstes Beispiel dient eine HiFlow-Simulation, bei der sich ein Wirbel entlang einer Grenze in der Gitterauflösung in Richtung Westen bewegt. Das fein aufgelöste Gebiet befindet links in Bewegungsrichtung des Wirbels, das grob aufgelöste Gebiet rechts in Bewegungsrichtung. Eine detaillierte Beschreibung des Szenarios findet sich in 7.2.

Betrachtet wird hier die Ablenkung der Zugbahn des Wirbels, die wie in Abschnitt 7.2 beschrieben, berechnet wird. In beiden Fällen oszilliert der Wirbel um eine Gleichgewichtslage, die nicht auf der Grenze, sondern im feinen Gitter liegt. Bei der gröberen Gitterauflösung ist sowohl die Schwingungsdauer, als auch die Amplitude der Oszillation größer.

Beim zweiten Beispiel wird die Änderung der kinetischen Energie des Wirbels untersucht, ausführliche Erklärungen dazu siehe Abschnitt 7.3. Der Wirbel startet nun im fein aufgelösten Gebiet, nach 200 km zurückgelegtem Weg erreicht er eine Grenze in der Gitterauflösung.

Der Verlust der kinetischen Energie des Wirbels im feinen bzw. im groben Gebiet bei der Simulation auf einem adaptierten Gitter entspricht jeweils dem Verlust, den der Wirbel auf einem uniformen Gitter der entsprechenden Gitterweite hat. Der Unterschied im relativen Energieverlust ist wesentlich stärker ausgeprägt für die Simulation auf dem Gitter mit zwei Verfeinerungsstufen Unterschied.

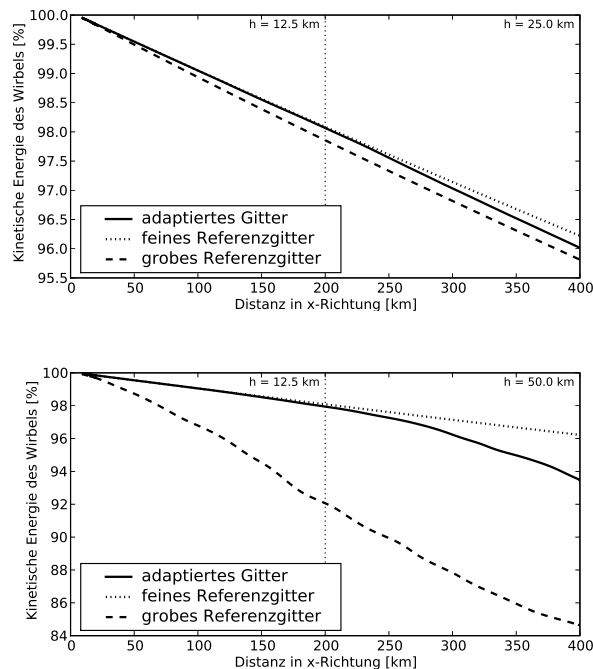


Abbildung 7.3: Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Gitterauflösungen. Bewegung vom feinen ins grobe Gitter, relative Änderung der kinetischen Energie des Wirbels (siehe Abschnitt 7.3). HiFlow,  $h_{fein} = 12.5$  km,  $h_{grob} = 25$  km (oben); HiFlow,  $h_{fein} = 12.5$  km,  $h_{grob} = 50$  km (unten).

## 7.2 Änderung der Zugbahn

Die Position des Sturms wird berechnet als gewichteter Schwerpunkt der Vorticity, wobei nur Werte größer als ein bestimmter Schwellwert berücksichtigt werden. Als Schwellwert wird 75% der maximalen Vorticity gewählt. Die Gewichtung erfolgt über die Differenz zwischen dem diskreten Vorticity-Wert an einem Freiheitsgrad (HiFlow) bzw. auf einem Element (StormFlash) und dem Schwellwert.

Bei der Auswertung der Vorticityfelder der StormFlash-Simulationen fallen Artefakte auf, deren Ursprung in geringen Störungen des Geschwindigkeitsfeldes liegt. Beim Übergang zwischen groben und feinem Gitter entstehen in den meridionalen Geschwindigkeitskomponenten wellenförmige Strukturen. Diese tauchen auf unabhängig von den beiden Gitterweiten und der Zeitschrittweite der Simulation. Möglicherweise handelt es sich um die bereits mehrfach erwähnten externen Schwerewellen, die bei der Lösung der Flachwassergleichungen auftreten.

Bereits geringe Störungen im Geschwindigkeitsfeld können zu großen Änderungen im Vorticityfeld führen, wie in Abbildung 7.4 sichtbar wird:

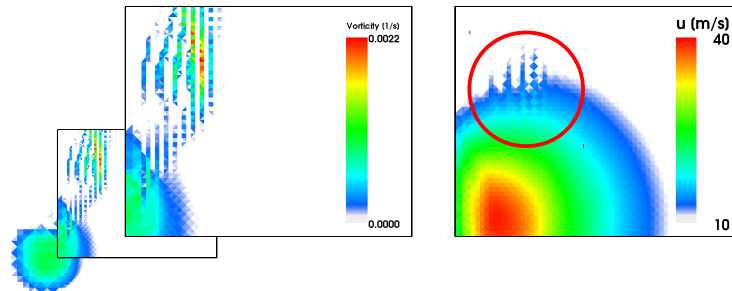


Abbildung 7.4: Artefakte im Vorticityfeld (links) zum Zeitpunkt  $t = 7$  h in StormFlash aufgrund von hochfrequenten Wellenstrukturen in der meridionalen Geschwindigkeit (rechts). StormFlash.

Wird die Zugbahn des Wirbels nun als gewichteter Schwerpunkt der Vorticity bestimmt, so verfälschen diese Artefakte die tatsächliche Zugbahn. In einem zusätzlichen Postprocessing-Schritt werden die StormFlash-Vorticityfelder deshalb so geglättet, dass die hochfrequenten Störungen in der Vorticity gerade verschwinden. Die Glättung erfolgt mit Hilfe eines Gaußfilters über jeweils 5 Gitterzellen in jede Raumrichtung.

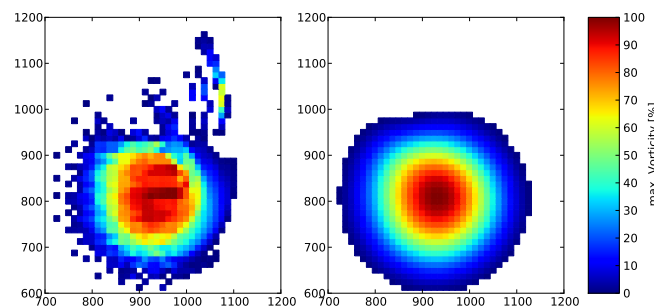


Abbildung 7.5: Ungeglättetes Vorticityfeld (links), geglättetes Vorticityfeld (rechts) zum Zeitpunkt  $t = 7$  h. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.

### 7.2.1 Bewegung entlang einer Grenze – Szenario 1

#### HiFlow

Sowohl in Szenario 1a (7.7a) als auch in Szenario 1b (7.7b) oszilliert der Sturmtrack bei den Simulationen mit HiFlow mit einer Amplitude von  $\approx 1.5$  km, wobei sich das Zentrum des Sturms immer im feinen Gebiet befindet. Diese Tendenz, die Anziehung des Wirbels durch das feine Gitter in HiFlow, bestätigt sich auch in den Zugbahnen der Szenarien 2a, 2c, 3a und 3c (Abbildungen 7.9a, 7.9c, 7.11a und 7.11c). Abgesehen von den beobachteten Oszillationen behält der Sturm seine Position in den Simulationen mit HiFlow sehr gut bei.

#### StormFlash

Auch in den Simulationen mit StormFlash (Abbildungen 7.8a bis 7.8b) ist eine Oszillation des Wirbels sichtbar, angezogen wird er hier allerdings vom groben Gitter. Anders als in den Simulationen mit HiFlow, bei denen kein zusätzliches Abdriften des Wirbels sichtbar ist, wird der Sturm hier leicht abgelenkt.

Sowohl für Szenario 1a (7.8a) als auch für Szenario 1b (7.8b) ist zunächst ein Drift in Richtung des gröberen Gitters sichtbar. In Szenario 1b dreht der Sturm nach 100 km in Richtung Norden, d.h. in Richtung des feineren Gitters. Der dann folgende Trend liegt bei 1 km Ablenkung nach Norden für 100 km zurückgelegte Distanz in x-Richtung. In Szenario 1a wird der Sturm während der gesamten Simulation um 1 km/100 km in Richtung Norden, d.h. in Richtung des gröberen Gitters, abgelenkt. Insgesamt sind der beobachtete Trend sowie die Oszillation relativ gering im Vergleich mit der Gitterweite von 25 km.

Eine Erklärung für die Oszillationen, die sowohl in den Simulationen mit HiFlow als auch in denen mit StormFlash auftauchen, liefert in allen Fällen der Blick auf das Vorticityfeld (Abbildung 7.6). Aufgrund des Gradienten in der Gitterauflösung entstehen spiralförmig angeordnete Vorticitymaxima, die sich um das Sturmzentrum drehen. Wird das Sturmzentrum nun als gewichteter Schwerpunkt des Vorticityfeldes berechnet, so fallen diese spiralförmigen Maxima stark ins Gewicht. Der Sturm oszilliert also nur vermeintlich um eine Ruhelage. Diese Oszillation ist jedoch klein im Verhältnis zur Gitterweite.

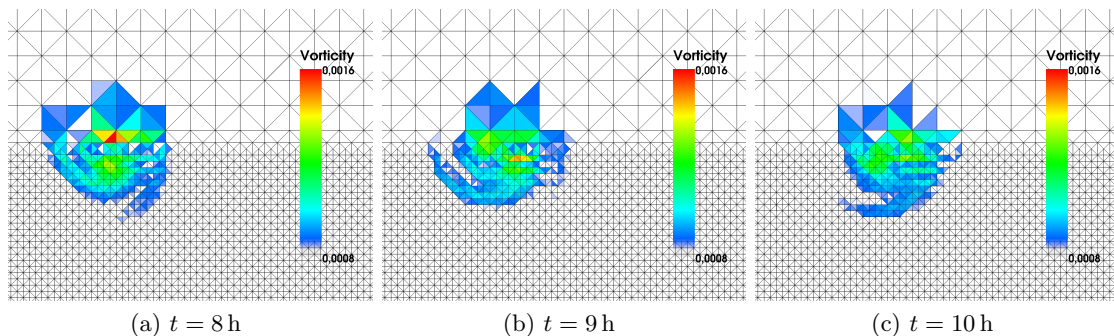
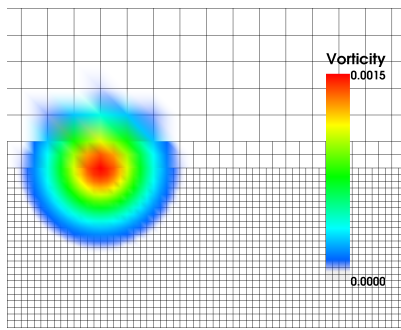
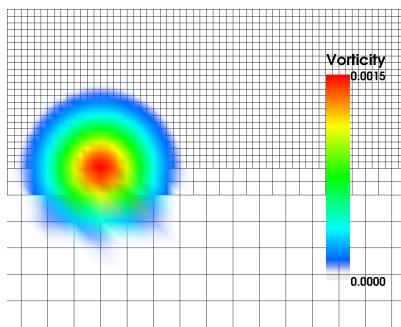
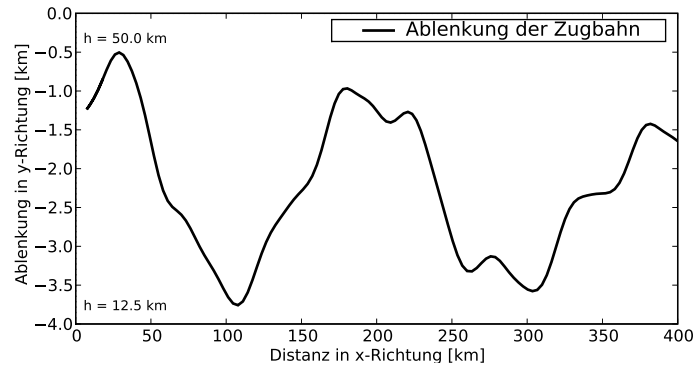


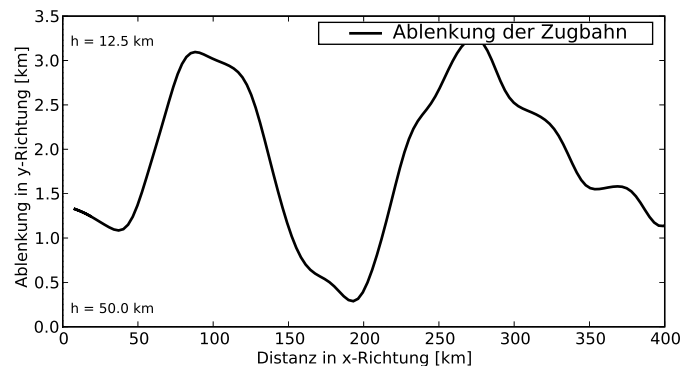
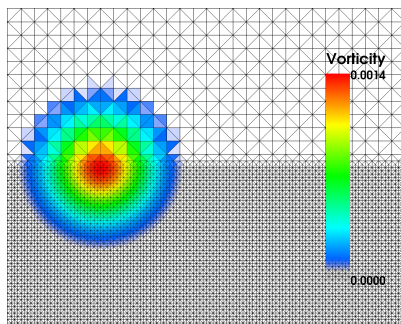
Abbildung 7.6: Szenario 1a – Vorticityfeld. Spiralförmig angeordnete Vorticity-Maxima. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.



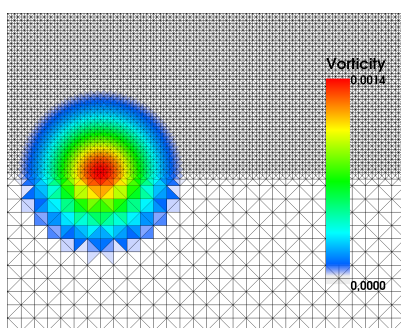
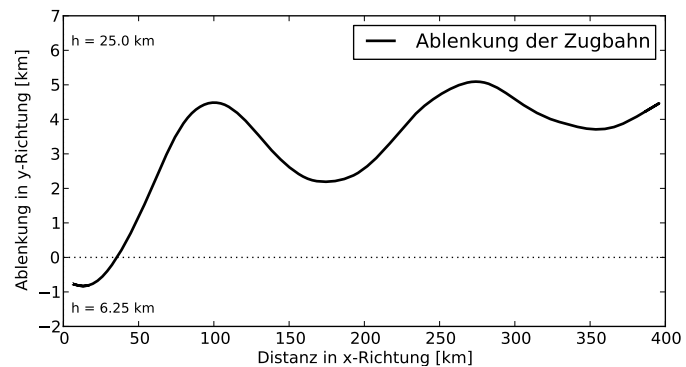
(a) Szenario 1a, HiFlow.



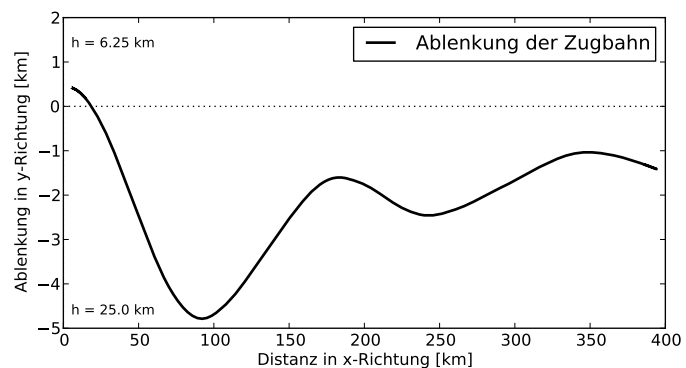
(b) Szenario 1b, HiFlow.

Abbildung 7.7: Szenario 1a und 1b – Bewegung entlang der Grenze. Ablenkung von der Zugbahn. HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.

(a) Szenario 1a, StormFlash.



(b) Szenario 1b, StormFlash.

Abbildung 7.8: Szenario 1a und 1b – Bewegung entlang der Grenze. Ablenkung von der Zugbahn. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.



### 7.2.2 Bewegung vom feinen ins grobe Gitter – Szenario 2

#### HiFlow

Bewegt sich der Wirbel vom feinen ins grobe Gitter, wird offensichtlich, dass die Ablenkung im groben Gitter betragsmäßig wesentlich größer ist als die im feinen Gitter (Abbildungen 7.9a bis 7.9c). Das ist wenig überraschend, da die Zugbahn als gewichtetes Mittel der diskreten Vorticitywerte an den Freiheitsgraden der Elemente berechnet wird. Bei größerer Gitterweite wird auch das gewichtete Mittel größere Schwankungen aufweisen. Simulationen auf uniform verfeinerten Gittern bestätigen ebenfalls, dass die Schwankungen in der Zugbahn größer sind, je größer die Gitterweite ist.

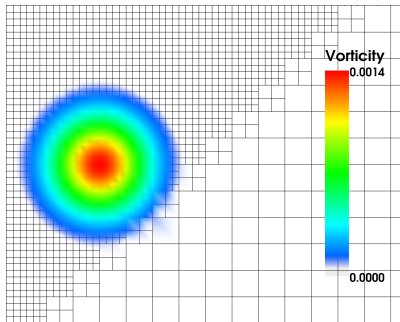
Ein zusätzlicher Einfluss des Gittergradienten orthogonal zur Bewegungsrichtung (2b) ist nicht erkennbar. Steht der Gradient nicht senkrecht auf die Bewegungsrichtung (2a und 2c) wird der Wirbel wie schon in Szenario 1a und 1b (Abbildungen 7.7a und 7.7b) tendenziell ins feinere Gitter gezogen.

#### StormFlash

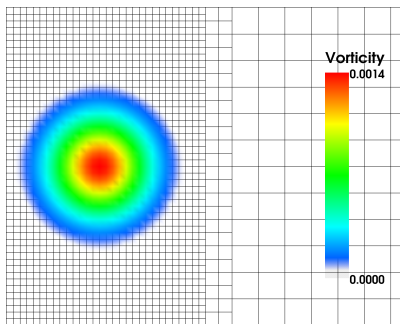
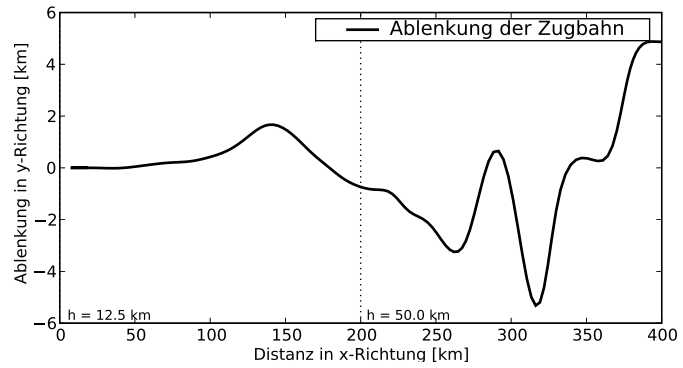
In den Simulationen mit StormFlash (Abbildungen 7.10a bis 7.10c) zeigt sich ein anderes Verhalten. Hier hat der Gittergradient senkrecht zur Bewegungsrichtung einen merkbaren Einfluss auf die Zugbahn des Wirbels: In Szenario 2b (Abbildung 7.10b) wird der Wirbel stark nach Süden ausgelenkt ( $\approx 8$  km) sobald er in die Nähe des Gittergradienten kommt. Nachdem das Sturmzentrum die Gittergrenze passiert hat, dreht der Sturm nach Norden bis zu einer maximalen Auslenkung von circa 6 km, die er nach weiteren 100 km zurückgelegtem Weg erreicht hat, anschließend bewegt er sich wieder nach Süden. Am Ende der Simulation, d.h. nach 400 zurückgelegten Kilometern, beträgt die Auslenkung  $< 1$  km. Die Ablenkung des Wirbels von der erwarteten Zugbahn nach 400 km ist also sehr gering.

In Szenario 2a und 2c (Abbildungen 7.10a und 7.10c) verhält sich der Wirbel ähnlich wie in Szenario 2b: Der Wirbel bewegt sich zunächst in Richtung Süden. Nach (2a) bzw. kurz vor (2c) Passage des Gittergradienten dreht er nach Norden. Nach Erreichen der maximalen Auslenkung in Richtung Norden, dreht er erneut nach Süden. Wie schon in Szenario 1a und 1b (Abbildungen 7.8a und 7.8b) wird der Wirbel auch in Szenario 2a und 2c zusätzlich ins gröbere Gitter gezogen. So ist die Auslenkung in Richtung des größeren Gebiets, d.h. nach Süden ( $\approx 11$  km) in Szenario 2a betragsmäßig wesentlich größer als die anschließende Auslenkung in Richtung des feineren Gebiets nach Norden ( $\approx 7$  km) nach der Passage des Gittergradienten. Umgekehrt ist die Auslenkung nach Süden in Szenario 2c ( $\approx 3$  km) wesentlich kleiner als die nach Norden ( $\approx 10$  km).

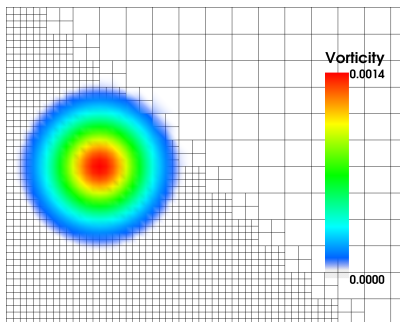
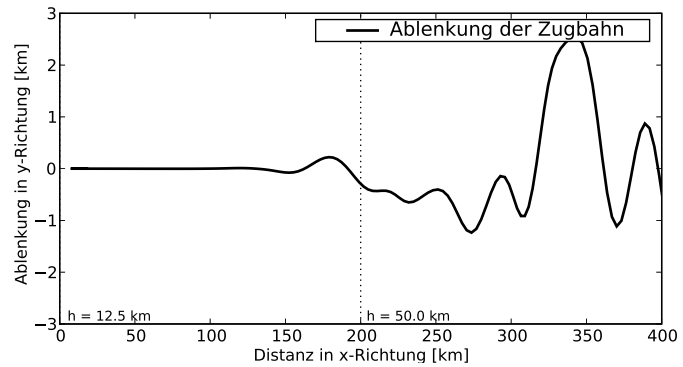
Nach 400 km beträgt die Ablenkung  $-6$  km in Szenario 2a und  $-1$  km in Szenario 2c. Im Vergleich zur Gitterweite von 25 km stellen beide Werte eine geringe Abweichung dar.



(a) Szenario 2a – HiFlow.



(b) Szenario 2b – HiFlow.



(c) Szenario 2c – HiFlow.

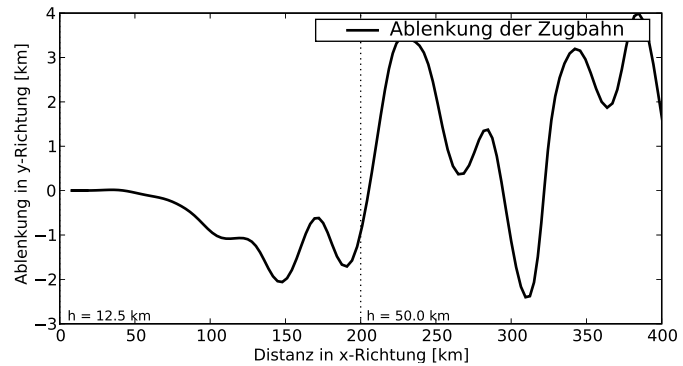
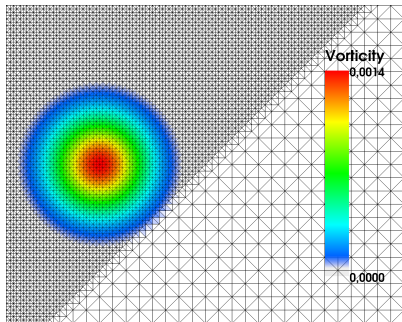
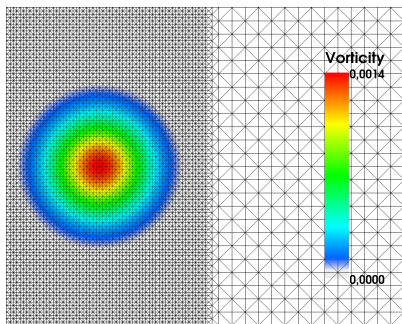
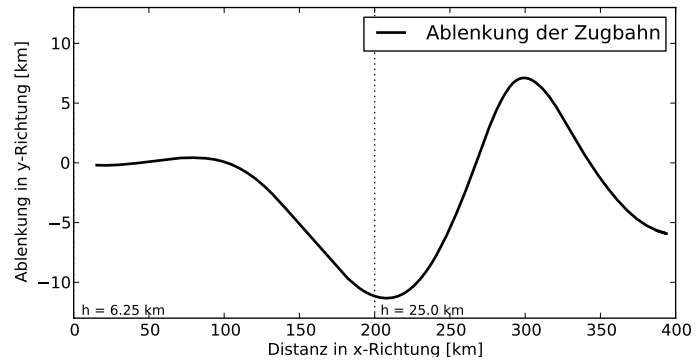


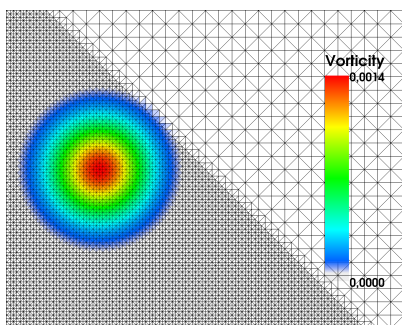
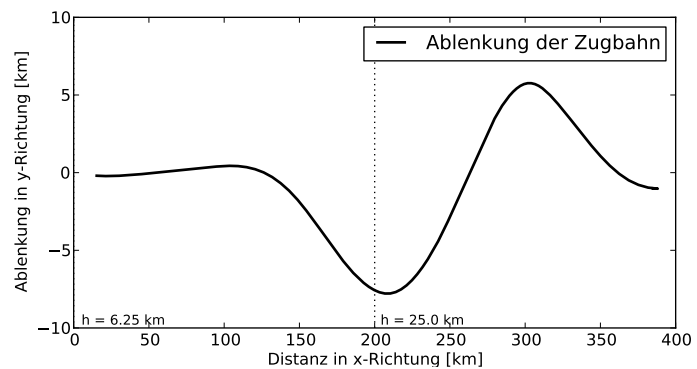
Abbildung 7.9: Szenario 2a, 2b, 2c – Bewegung vom feinen ins grobe Gitter. Ablenkung von der Zugbahn. HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.



(a) Szenario 2a – StormFlash.



(b) Szenario 2b – StormFlash.



(c) Szenario 2c – StormFlash.

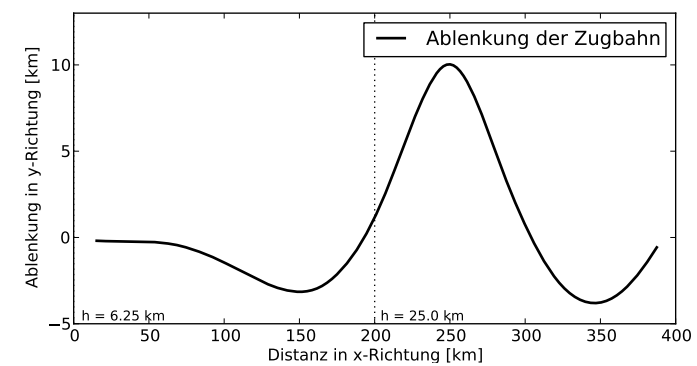
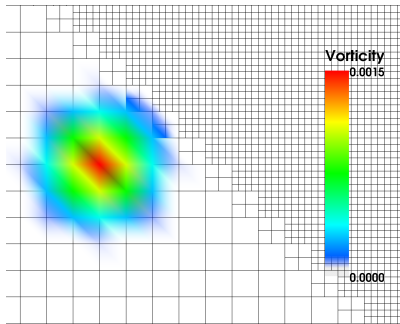
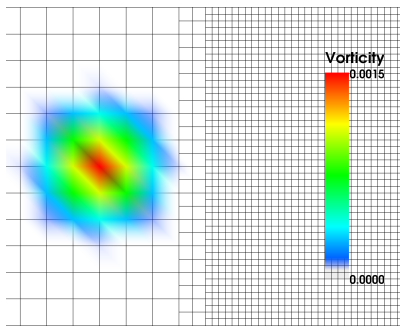
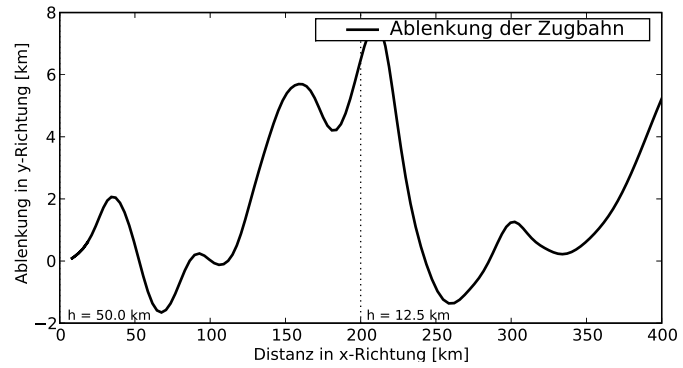


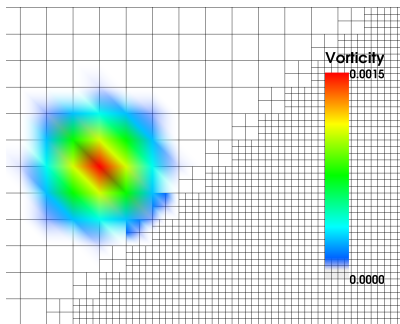
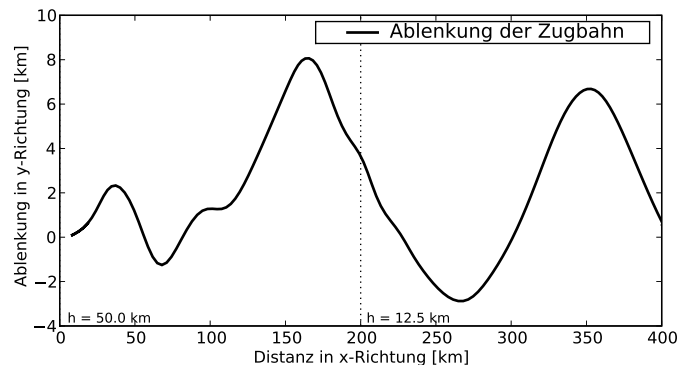
Abbildung 7.10: Szenario 2a, 2b, 2c – Bewegung vom feinen ins grobe Gitter. Ablenkung von der Zugbahn. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.



(a) Szenario 3a – HiFlow.



(b) Szenario 3b – HiFlow.



(c) Szenario 3c – HiFlow.

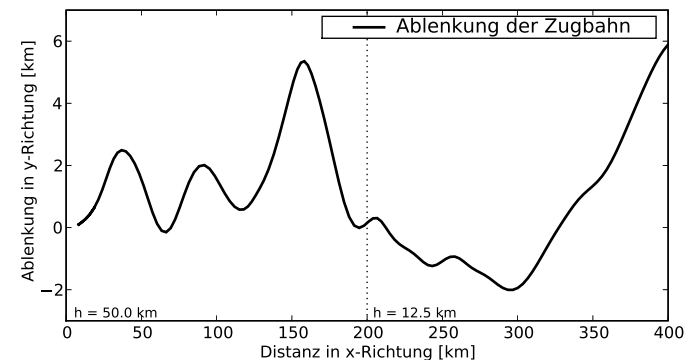
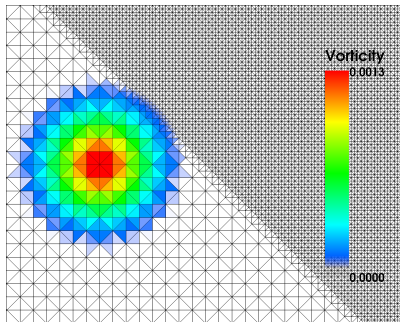
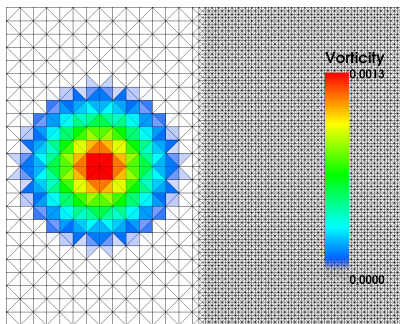
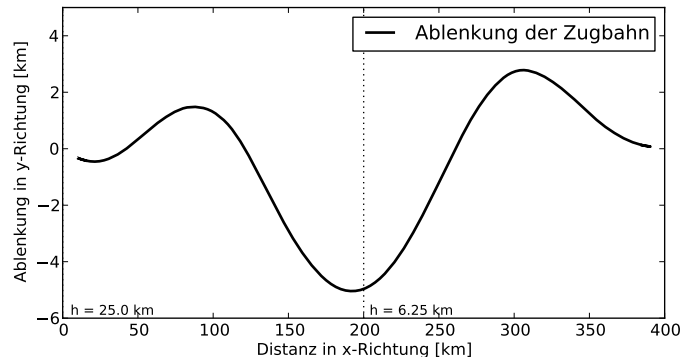


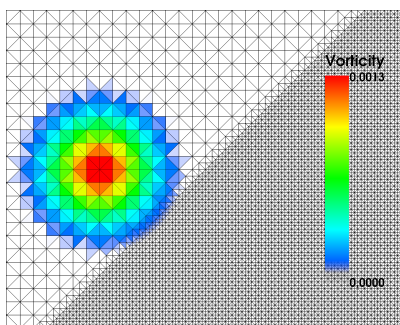
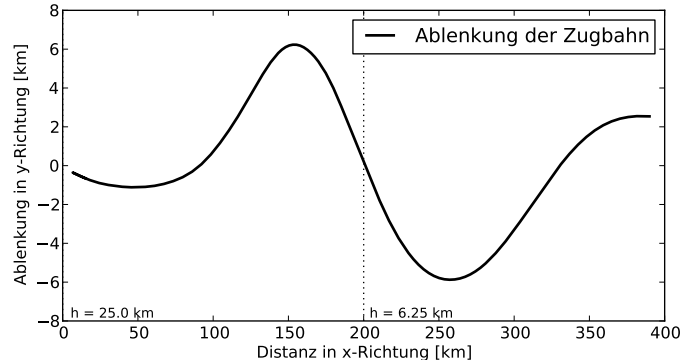
Abbildung 7.11: Szenario 3a, 3b, 3c – Bewegung vom groben ins feine Gitter, Ablenkung von der Zugbahn. HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.



(a) Szenario 3a – StormFlash.



(b) Szenario 3b – StormFlash.



(c) Szenario 3c – StormFlash.

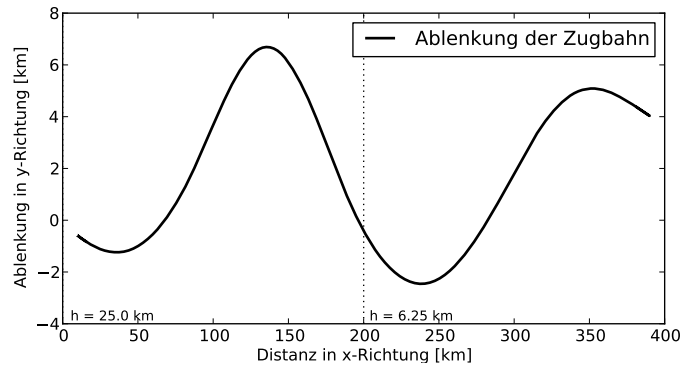


Abbildung 7.12: Szenario 3a, 3b, 3c – Bewegung vom groben ins feine Gitter. Ablenkung von der Zugbahn. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.

### 7.2.3 Bewegung vom groben ins feine Gitter – Szenario 3

#### HiFlow

Zieht der Sturm vom groben ins feine Gitter, so schwankt die Zugbahn im groben Gebiet zunächst stark (Abbildungen 7.11a bis 7.11c). Vor dem Erreichen der Gittergrenze wird der Wirbel deutlich nach Norden ausgelenkt. In Szenario 7.11b und 7.11c erreicht der Wirbel 50 km vor der Gittergrenze seine maximale Auslenkung von 8 km (3b) bzw. 6 km (3c), in Szenario 3a ist neben einem ersten Auslenkungsmaximum von 6 km nach 150 Kilometern ein weiteres Maximum von 8 km Auslenkung wenige Kilometer nach der Gittergrenze vorhanden.

Nachdem der Wirbel die Gittergrenze passiert hat, setzen sich die Störungen in der Zugbahn im feinen Gebiet fort. Nach 400 km hat der Wirbel eine Auslenkung von 5 km (3a), 1 km (3b) und 6 km. Die feine Gitterauflösung ist nicht in der Lage, die Schwankung, die die Zugbahn bei Eintritt in das Gebiet zeigt, abzdämpfen. Es liegt sogar die Vermutung nahe, dass der Wirbel nun endgültig seine zu erwartende Zugbahn verlässt.

Tatsächlich ist das nicht der Fall. Eine Simulation über eine lange Distanz von circa 3600 km (Abbildung 7.13) zeigt, dass sich der Sturm nach 1000 km zurückgelegtem Weg im feinen Gebiet wieder beruhigt, die Zugbahn scheint zu konvergieren. Trotzdem ist der Wirbel dann um circa 4 km in negative y-Richtung abgelenkt, was bei einer Gitterweite von 12.5 km dennoch keine große Ablenkung darstellt.

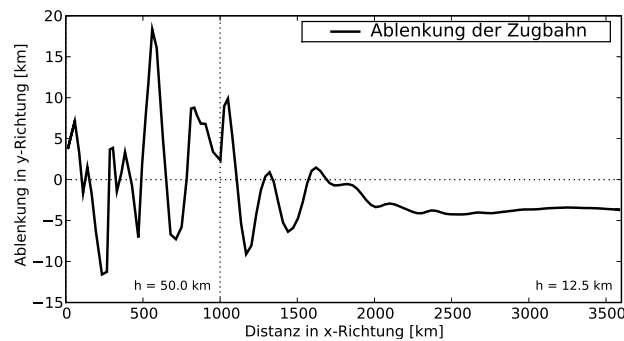


Abbildung 7.13: Bewegung vom groben ins feine Gitter, Ablenkung von der Zugbahn über eine lange Distanz ( $\approx 3600$  km). HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.

#### StormFlash

In den StormFlash-Simulationen (Abbildungen 7.12a bis 7.12c) ist für dieses Szenario ein sehr ähnliches Verhalten wie in den entsprechenden HiFlow-Simulationen (Abbildungen 7.11b und 7.11c) sichtbar. Auch hier wird der Wirbel vor der Gittergrenze deutlich nach Norden ausgelenkt. In Szenario 3b und 3c erreicht er das Maximum der Auslenkung ebenfalls 50 km vor der Gittergrenze, in Szenario 3a bereits 100 km vor der Grenze. Während der nächsten 100 km bewegt sich der Wirbel in Richtung Süden. Nach Erreichen der maximalen südlichen Auslenkung dreht er wieder nach Norden, um dort nach weiteren 100 km ein zweites Maximum nördlicher Auslenkung zu erreichen. Die Auslenkung nach 400 zurückgelegten Kilometern beträgt 0 km in Szenario 3a, 2 km in Szenario 3b und 4 km in Szenario 3c.

Wie auch in den StormFlash-Simulationen für Szenario 2 entspricht die Zugbahn von Szenario 3a und 3c einer Überlagerung der Zugbahn von Szenario 1a, 1b und 3b (Abbildungen 7.8a, 7.8b und 7.12b). Auch hier wird der Sturm tendenziell ins gröbere Gitter gezogen: Die maximale nördliche Auslenkung in Szenario 3a beträgt 2 km bzw. 3 km. Die maximale südliche Auslenkung, d.h. die Auslenkung in Richtung des gröberen Gitters beträgt 5 km. In Szenario 3c beträgt die maximale Auslenkung in Richtung des gröber verfeinerten Nordens 7 km, die maximale Auslenkung in Richtung Süden nur 2 km.

Anders als in HiFlow ist das feine Gitter insgesamt besser in der Lage die Störung die im groben Gitter entstanden ist abzdämpfen. Der Wirbel kehrt auf seine ursprüngliche Zubahn zurück, die Störung nimmt ab.

### 7.3 Änderung der Intensität

Als Maß für die Intensität dient die kinetische Energie des Wirbels. Dazu wird der Hintergrunddrift von den Geschwindigkeitskomponenten abgezogen, die Beiträge werden quadriert und über das gesamte Gebiet integriert. Da der Hintergrunddrift konstant ist, sollte dieser keine numerischen Verluste verursachen, denn die numerische Reibung ist analog zur physikalischen Reibung proportional dem Laplace der Geschwindigkeit. Die so berechnete Energie dient als Maß für die kinetische Energie des Wirbels. Dass dies näherungsweise zutrifft, ist in Abbildung 7.14 zu sehen.

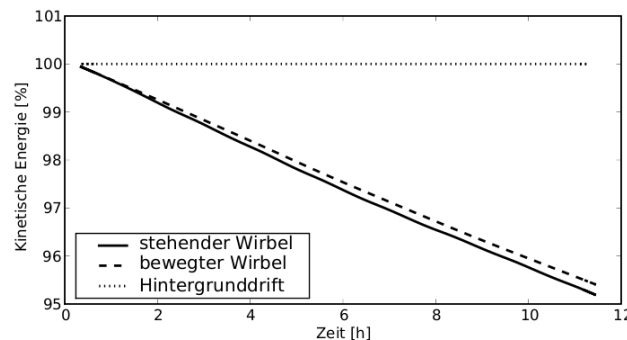


Abbildung 7.14: Relative Änderung der kinetische Energie eines Wirbels mit und ohne Hintergrundströmung, uniform verfeinertes Gebiet. HiFlow,  $h = 12.5$  km.

Verglichen wird hier die kinetische Energie eines Wirbels mit Hintergrundströmung mit der eines Wirbels ohne Hintergrundströmung. Der Wirbel ohne Hintergrundströmung verliert etwas weniger Energie als der bewegte Wirbel. In guter Näherung entspricht die kinetische Energie des Wirbels dennoch der hier approximierten kinetischen Energie des Wirbels.

Betrachtet werden nur diejenigen Szenarien, bei denen sich der Wirbel frontal auf die Grenze in der Gitterauflösung zubewegt, also gerade Szenario 2b und Szenario 3b (Abbildungen 7.15, 7.16, 7.17 und 7.18). Für alle übrigen Simulationen unterscheidet sich der Energieverlust kaum von den beiden hier ausgewählten Szenarien. In Abbildung 7.15, 7.16, 7.17 und 7.18 ist neben dem relativen Energieverlust der betrachteten Szenarien jeweils der Energieverlust eines groben und eines feinen Referenzlaufes abgebildet. In allen simulierten Szenarien zeigt sich, dass der Energieverlust im groben und im feinen Gebiet jeweils dem Verlust entspricht, den der Wirbel in einem uniformen Gitter der entsprechenden Gitterweite hat.

## HiFlow

In Szenario 2b verliert der Wirbel zunächst wenig Energie (Abbildung 7.15). Von Kilometer 0 bis 100 folgt der Energieverlust sehr genau dem des feinen Referenzlaufes. Da der Wirbel selbst einen Radius von 100 km hat, befindet sich der Wirbel von da an schon teilweise im größeren Gebiet, der Energieverlust nimmt zu. Nach Übertreten der Grenze zwischen Kilometer 200 und 250 folgt die Passage eines kurzen Gitterabschnittes mit einer rechtechnisch bedingten Auflösung von 25 km – hier steigt der Energieverlust weiter, bis er etwa ab Kilometer 300 dem des groben Referenzlaufes entspricht.

Der Energieverlust in Szenario 3b verhält sich analog (Abbildung 7.16): Zunächst verliert der Wirbel so viel Energie wie im groben Referenzlauf. Der Übergangsbereich in der Gitterauflösung befindet sich hier zwischen Kilometer 150 und 200, ab etwa 100 km ist eine deutliche Abweichung von der groben Referenzkurve zu sehen. Beim Eintritt ins feine Gebiet entspricht der Energieverlust bereits dem des feinen Referenzlaufes.

Ein zusätzlicher Effekt durch die Grenze in der Gitterauflösung ist nicht sichtbar.

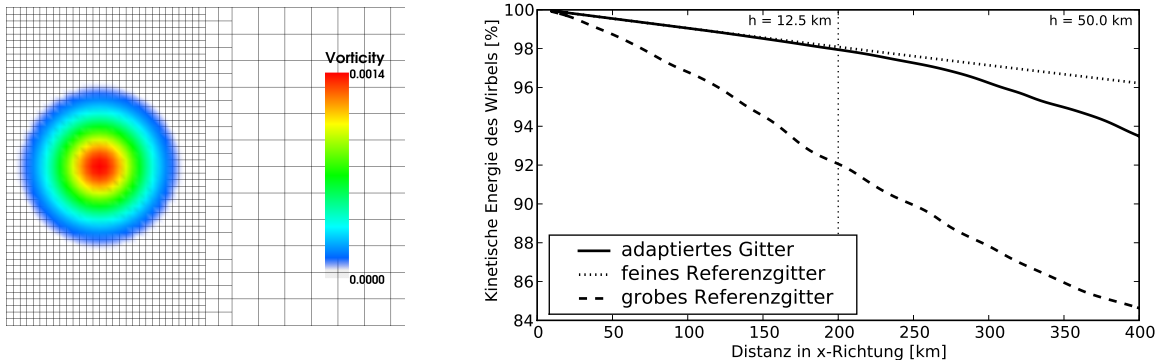


Abbildung 7.15: Szenario 2b – Bewegung vom feinen ins grobe Gitter. Relative Änderung kinetische Wirbelenergie. HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.

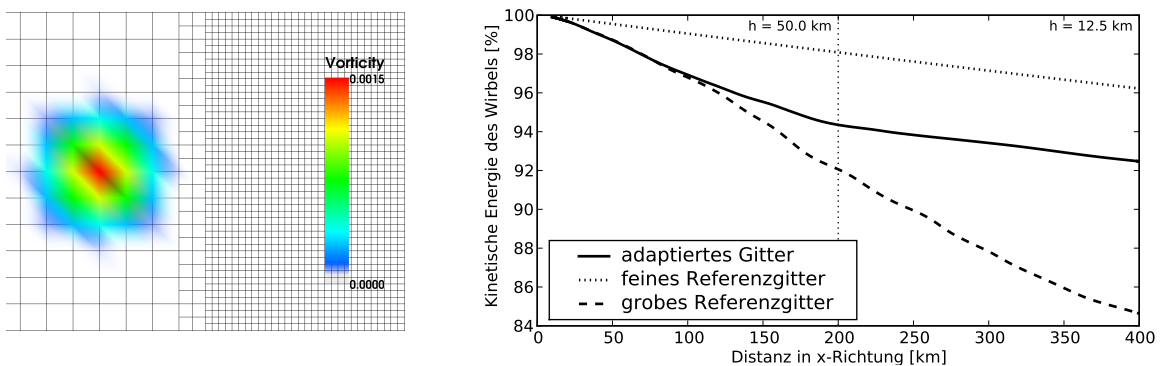


Abbildung 7.16: Szenario 3b – Bewegung vom groben ins feine Gitter. Relative Änderung kinetische Wirbelenergie. HiFlow,  $h_{grob} = 50$  km,  $h_{fein} = 12.5$  km.



### StormFlash

Auch in den StormFlash-Simulationen verhält sich der Energieverlust des Wirbels sehr ähnlich dem Energieverlust auf einem uniform verfeinerten Gitter der entsprechenden Gitterauflösung. Der Übergangsbereich zwischen dem Energieverlust im feinen zum groben Gitter in Szenario 2b (Abbildung 7.17) setzt hier jedoch etwas früher ein als in der entsprechenden HiFlow-Simulation.

Auffällig ist der Energieverlust in Szenario 3b (Abbildung 7.18): Während der ersten 40 km verhält sich der Energieverlust wie der Verlust auf einem uniformen groben Gitter. Während der nächsten 150 km verliert der Wirbel wesentlich weniger Energie als beim groben Referenzlauf. Diese Beobachtung steht im Zusammenhang mit den in Abschnitt 7.2 bereits beschriebenen hochfrequenten Störungen im Geschwindigkeitsfeld (Abbildung 7.4). Durch die wellenartigen Strukturen im meridionalen Geschwindigkeitsfeld entstehen zu hohe Geschwindigkeitsbeiträge, deren quadratische Beiträge zur Wirbelenergie maßgeblich für den geringeren Energieverlust in diesem Bereich verantwortlich sind.

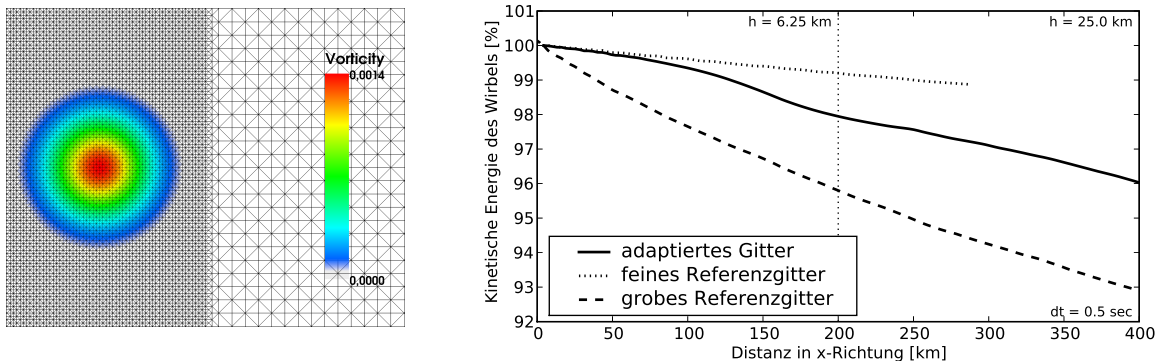


Abbildung 7.17: Szenario 2b – Bewegung vom feinen ins grobe Gitter. Relative Änderung kinetische Wirbelenergie. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.

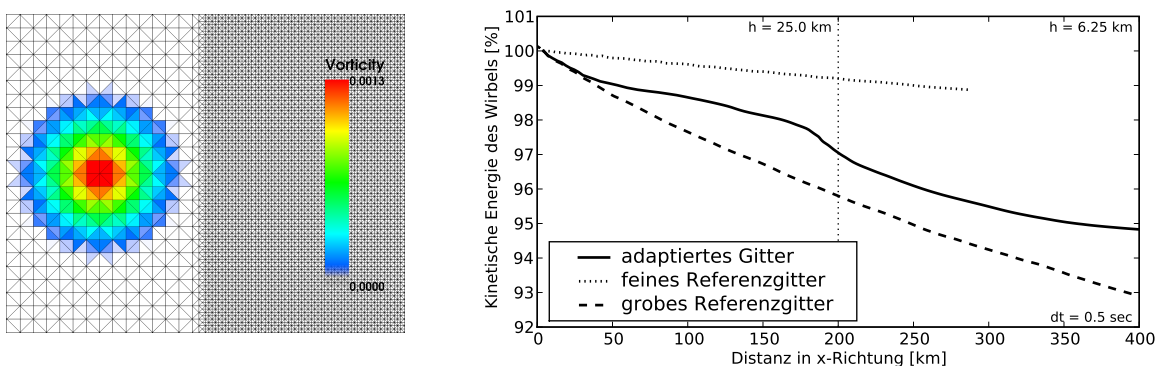


Abbildung 7.18: Szenario 3b – Bewegung vom groben ins feine Gitter. Relative Änderung der kinetischen Energie des Wirbels. StormFlash,  $h_{grob} = 25$  km,  $h_{fein} = 6.25$  km.

## 7.4 Fazit

Sowohl die kinetische Wirbelenergie als auch die Zugbahn eignen sich gut um die korrekte Darstellung der Physik der betrachteten Szenarien 1a, 1b, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b und 3c zu untersuchen. HiFlow und StormFlash liefern hier beide sehr gute, qualitativ vergleichbare Ergebnisse.

Die Zugbahn des Wirbels wird durch die Grenze der Gitterauflösung leicht beeinflusst, je nach verwendetem Software-Paket existieren unterschiedliche Trends. Prinzipiell ist die Auslenkung des Wirbels im groben Gebiet größer als die im feinen Gebiet. Ist der Wirbel beim Übergang vom groben ins feine Gebiet bereits stark abgelenkt, so ist das feine Gitter in HiFlow jedoch nicht in der Lage diese Schwankung sofort zu dämpfen, der Wirbel wird dann zunächst weiter stark ausgelenkt. Erst über eine längere Distanz ( $\approx 1000$  km) tritt eine Dämpfung der Schwankung auf und der Sturmtrack scheint wieder zu konvergieren. In StormFlash wird die Störung besser gedämpft, so dass der Wirbel nach 400 km wieder ungefähr seiner ursprünglichen Zugbahn folgt. Bewegt sich der Wirbel entlang einer Gittergrenze, oszilliert das Sturmzentrum um die erwartete Zugbahn. Grund dafür sind spiralförmig angeordnete Vorticitymaxima, die in Folge des Gittergradienten entstehen. In HiFlow wird der Wirbel zusätzlich zur Oszillation tendenziell ins feinere Gitter gezogen, in StormFlash ins gröbere Gitter. In allen Fällen ist die Auslenkung jedoch gering im Vergleich mit der Gitterweite.

Der Übergang zwischen den unterschiedlich aufgelösten Gittern verursacht prinzipiell keinen zusätzlichen Energieverlust. Der Energieverlust in den einzelnen Gebieten entspricht jeweils dem Verlust auf einem uniformen Gitter der jeweiligen Gitterauflösung. Eine Ausnahme existiert: Bewegt sich der Wirbel vom groben ins feine Gebiet, so entstehen in den Simulationen mit StormFlash hochfrequente Störungen in der meridionalen Geschwindigkeitskomponente. Diese reduzieren den Energieverlust vorübergehend.

Beide Software-Pakete liefern für die hier betrachteten Szenarien also vergleichbare Ergebnisse. Dabei muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die simulierten Szenarien stark idealisiert sind. Die Simulation komplexerer Szenarien können zu ganz anderen Ergebnissen führen. Denkbar ist beispielsweise, dass unterschiedlich starke Konvektion an einer Auflösungsgrenze zu einer deutlich stärkeren und dauerhafteren Asymmetrie und Ablenkung des Sturms führen kann. Mit Hilfe dreidimensionaler Simulationen könnte diese Vermutung näher untersucht werden.

Wie in Abschnitt 6.4.3 und 6.3 bereits erklärt, unterscheiden sich die beiden Verfahren jedoch signifikant in ihrer notwendigen Rechenzeit. Zu beachten ist, dass StormFlash als un stetiges Verfahren einen potentiellen Vorteil in der Parallelisierbarkeit besitzt. Da StormFlash zum Zeitpunkt der Durchführung der Simulationen nur seriell ausführbar war, konnte dieser jedoch nicht ausgenutzt werden.

In Tabelle 7.1 sind exemplarisch die entsprechenden Rechenzeiten für die serielle Simulation von Szenario 1a, einen groben und einen feinen Referenzlauf aufgeführt.

|                     | HiFlow | StormFlash |
|---------------------|--------|------------|
| Szenario 1a         | 24 min | 8478 min   |
| grober Referenzlauf | 7 min  | 2414 min   |
| feiner Referenzlauf | 85 min | ?          |

Tabelle 7.1: Vergleich der Rechenzeiten in HiFlow und StormFlash.

---

Das Verhältnis der Rechenzeiten der beiden Verfahren liegt in allen Simulationen zwischen 300 und 400. Mit HiFlow lassen sich also in wesentlich kürzerer Zeit qualitativ gleichwertige Ergebnisse wie mit StormFlash erzielen. Dies soll jedoch kein generelles Urteil sein, sondern lediglich ein Vergleich für die in dieser Diplomarbeit betrachteten Szenarien unter den in Abschnitt 6 beschriebenen Einstellungen. Eine Verkürzung der Rechenzeit in StormFlash ließe sich auf verschiedene Wege realisieren. Insbesondere im Hinblick auf eine mögliche Parallelisierung, den Einsatz eines semi-implizites Zeitschrittverfahren und die Dämpfung externer Schwerewellen besteht viel Potential für eine Verkürzung der Rechenzeit. Der dazu nötige Implementierungs-Aufwand übersteigt diese Diplomarbeit leider.



## 8. Adaptivität

Das Ziel räumlicher Gitter-Adaptivität ist die Maximierung der Effizienz des Gitters durch automatische Anpassung. Adaptivität kann ein sehr mächtiges Werkzeug sein – aber nur unter der Voraussetzung, dass sie richtig eingesetzt wird. Verschiedene Anwendungen können eigene, problemspezifische Adaptions-Methodiken erfordern. Die Methodik setzt sich dabei zusammen aus einer Adaptions-Technik, einem Adaptions-Kriterium und einer Adaptions-Strategie. Eine schöne Übersicht über adaptive Methoden in der Modellierung der Atmosphäre findet sich im Buch von Behrens [19]. Anhand von zahlreichen Beispielen aus dem Bereich der Meteorologie stellt dieses die Prinzipien der Adaptivität vor. Weiter umfasst es Aspekte der Gittergenerierung, der effizienten Strukturierung von Daten, der Parallelisierung und der Numerik.

Hinter dem Begriff der *Adaptions-Technik* verbirgt sich die Frage, was eine Verfeinerung oder eine Vergrößerung rein technisch bedeutet. In Teil 3.1.4 wurde bereits gezeigt, dass der Fehler der Finite-Elemente-Lösung sowohl durch Erhöhen der Gitterauflösung, als auch durch Erhöhen des Polynomgrads der Ansatz- und Testfunktionen verringert wird. Daneben existieren noch Strategien der Gitterverformung. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Methode der Erhöhung der Gitterauflösung angewandt, die sogenannte h-Adaptivität.

Zur Steuerung der Gitter-Adaption dienen Indikatoren, die sich aus physikalischen oder mathematischen Eigenschaften des betrachteten Problems ableiten lassen. Das *Adaptions-Kriterium* legt dabei den Indikatorwert einer Zelle fest. Gemäß Behrens [19] lassen sich Adaptions-Kriterien zwei verschiedenen Paradigmen zuteilen: Physikalisch motivierte Adaptivität und mathematisch motivierte Adaptivität. Physikalisch motivierte Ansätze passen das Gitter lokal so an, dass das Gitter das physikalische Problem selbst besser auflöst. Als Adaptions-Kriterium fließen vorher definierte physikalische Eigenschaften des simulierten Problems ein, die das Problem charakterisieren. Beispiele hierfür sind Druckminima oder Vorticitymaxima für Zyklone. Mathematisch motivierte Ansätze verfeinern das Gitter stattdessen in Abhängigkeit vom Fehler der approximierten Lösung. Die Güte einer approximierten Lösung zu einer exakten Lösung lässt sich asymptotisch im Vorhinein über so genannte *a priori* Fehler abschätzen. Die Berechnung des *a priori* Fehlers setzt allerdings voraus, dass die exakte Lösung bekannt ist. In der Praxis wird das üblicherweise nicht der Fall sein. *A posteriori* Fehlerschätzer ermöglichen eine Abschätzung des Fehler auch ohne Kenntnis der exakten Lösung. Diese Klasse von Fehlerschätzern bildet die Basis der hier

verwendeten mathematisch motivierten Adaptions-Ansätze. Gebiete mit hoher physikalischer Aktivität, etwa Gebiete mit großen Druckgradienten, sind häufig auch die Gebiete, die einen großen numerischen Fehler erzeugen. Häufig führen beide Ansätze deshalb zu sehr ähnlichen Verfeinerungen.

Als *Adaptions-Strategie* versteht man die Strategie, die aus einem Gitter, für welches zellweise Indikatorwerte vorliegen, sukzessive das optimale Gitter erzeugt. Die Fragen hierbei sind, welche Anforderungen das adaptierte Gitter erfüllen soll und wie dieses optimale Gitter erzeugt werden kann. Dabei wird zunächst angenommen, dass als Adaptions-Kriterium ein beliebiges zellweises Fehlermaß ausgewählt wurde. Eine typische Anforderung an das adaptierte Gitter ist, dass die Fehlerbeiträge der Zellen auf dem gesamten Gebiet ausbalanciert sind, sich die Anzahl an Zellen jedoch nicht verändert. Bei diesem Ansatz reduziert sich der globale Fehler und die Qualität der Lösung steigt. Da sich die Problemgröße und damit auch der Rechen- und Speicherbedarf nicht verändert haben<sup>1</sup>, ist das resultierende, adaptierte Gitter *effizienter* als das Ausgangsgitter.

## 8.1 Adaptions-Kriterien

Die Auswahl des richtigen Adaptions-Kriteriums ist grundlegend für effiziente Adaptivität. Werden zu viele Elemente zur Verfeinerung ausgewählt, wird die approximierte Lösung zwar genauer, die Methode verliert aber an Effizienz, da die Rechendauer verhältnismäßig stark zunimmt. Werden umgekehrt zu wenige Elemente ausgewählt, wird sich die Rechenzeit verkürzen, gleichzeitig verliert die Lösung aber wieder an Genauigkeit. Gesucht ist also ein Kriterium, das die Effizienz des optimierten Gitters maximiert.

### 8.1.1 Physikalisch motivierte Adaptivität

Die Verwendung physikalisch motivierter Kriterien entspringt dem Ansatz, dass ein Problem physikalisch genauer beschrieben werden kann, je feiner das Gitter aufgelöst ist, auf dem es definiert ist. Als Beispiel dienen orografisch erzeugte Lee-Wellen auf der windabgewandten Seite eines Gebirgskamms. Lee-Wellen sind stationäre Schwerewellen, die bei stabil geschichteter Atmosphäre durch vertikales Auslenken der Grundströmung beim Umströmen eines Gebirges entstehen können. Die Länge einer solchen Lee-Welle beträgt wenige Kilometer [20], der Gebirgskamm kann sich über eine Distanz von mehreren 10 km erstrecken. Simuliert man die Strömungsdynamik um das Gebirge auf einem Gitter der Gitterweite 10 km, ist der Gebirgskamm bereits gut aufgelöst, nicht aber die Lee-Wellen. Die approximierte Lösung wird ein anderes Strömungsmuster darstellen, verglichen mit einer approximierten Lösung auf einem feiner aufgelösten Gitter. Da dieses physikalische Phänomen nur lokal stattfindet, wäre es sogar ausreichend, nur das Gebiet, in dem das Phänomen auftritt, zu verfeinern.

Eine Übersicht über physikalische Kriterien zur adaptiven numerischen Simulation von Zyklonen findet sich in der Dissertation von Jablonowski [21]. Bei den meisten der dort vorgestellten Kriterien handelt es sich um Gradienten von Größen, die in einem zusätzlichen Schritt diagnostisch berechnet werden müssen. Verglichen mit Kriterien auf Basis der prognostischen Modellvariablen, erfordern solche Kriterien verhältnismäßig viel Speicherkapazitäten und einen erhöhten Rechenaufwand.

Häufig werden Indikatoren definiert, die auf dem Maximum der relativen Vorticity  $\xi_{max}$  auf einer bestimmten Geopotentialfläche, üblicherweise auf 850 hPa, basieren. Die Adaptions-Vorschrift könnte dann folgendermaßen lauten:

<sup>1</sup>Abgesehen von Auswirkungen auf den möglichen Zeitschritt, siehe CFL-Kriterium in Abschnitt 6.4.3.

*Verfeinere alle Zellen, deren Vorticity-Wert mindestens 50% des Vorticity-Maximums beträgt.*

Neben dem Maximum, kann auch der Gradient der Vorticity verwendet werden. Weitere populäre Kriterien lassen sich aus dem Gradienten oder der zweiten Ableitung des Geopotentials ableiten.

Soll zur Gitter-Adaption eine Strategie verwendet werden, die darauf abzielt, Indikatorwerte gleichzuveteiligen, müssen bei der Ableitung eines Indikators für ein physikalisches Kriterium gewisse Dinge beachtet werden. Anders als bei mathematischen Fehlerschätzern existiert hierfür in der Regel kein natürlicher Zusammenhang zwischen Zellgröße und physikalischem Kriterium. Im Folgenden wird nun davon ausgegangen, dass sich für ein physikalisches Kriterium  $\Phi$  ein zellweiser Indikator  $\eta_K$  konstruieren lässt, der sich im Bezug auf die Gitterauflösung so verhält wie ein mathematischer Fehlerschätzer, d.h. dass der Indikatorwert mit zunehmender Gitterauflösung abnimmt.

Der Indikator soll sich zusammensetzen aus dem Zellintegral über das Kriterium, gewichtet mit der Gitterweite

$$\eta_K = h_K^{\beta-2} \int_K \Phi \, dK \quad \forall K \in T_h.$$

Der Faktor  $h_K^{-2}$  normiert den Indikatorwert mit der Zellgröße der betrachteten – hier quadratischen – Zelle, der Koeffizient  $\beta$  ist abhängig vom verwendeten Kriterium und der betrachteten Anwendung geeignet zu wählen.

Die in den numerischen Tests in Kapitel 9 verwendeten physikalischen Kriterien beruhen auf dem Maximum der Energie und dem Maximum der Vorticity. Für den verwendeten Vorticity-Indikator wurde  $\Phi = \xi^2$ , für den Energie-Indikator  $\Phi = E_{kin} = u^2 + v^2$  gewählt. Wie das resultierende Gitter schlussendlich aussehen wird, ist stark davon abhängig, wie der Koeffizient  $\beta$  gewählt wird. Wählt man beispielsweise  $\beta = 0$ , wird das Gitter in jedem Adaptions-Zyklus an den Stellen verfeinert, an denen der Betrag der Vorticity groß ist. Das würde bedeuten, dass immer der selbe Bereich verfeinert wird. Die Wahl von  $\beta$  ist keinesfalls trivial und benötigt einige Überlegungen und experimentelle Tests im Vorfeld. In Abbildung 8.1 ist das Gitter der Simulation eines Sturm-Sturm-Szenarios zu sehen, welches in 6 Adaptions-Zyklen auf Basis des Vorticity-Indikators der Startlösung verfeinert wurde. Das Startgitter hat 2500 Zellen, je Zyklus werden 5% der aktuellen Anzahl an Zellen verfeinert. Nach 6 Adaptions-Zyklen resultiert ein Gitter mit 6610 Zellen. Die Simulationen unterscheiden sich nur in der Wahl des Koeffizienten  $\beta$ .

Je nach Wahl von  $\beta$  ist die Differenz der Gitterauflösung der feinsten und der größten Zelle unterschiedlich groß. Für die Wahl von  $\beta = 1$  ist die am feinsten aufgelöste Zelle 7 mal verfeinert worden relativ zur größten Zelle. Für  $\beta = 16$  ist die feinste Zelle 3 mal so fein wie die größte. Je kleiner  $\beta$  gewählt wird, desto lokaler erfolgt die Verfeinerung, desto größer ist auch der Gradient in der Gitterauflösung und desto mehr Verfeinerungsstufen liegen zwischen dem am feinsten und dem am größten aufgelösten Gebiet. Für größere Werte von  $\beta$  wird insgesamt ein größeres Gebiet verfeinert, dieses wird allerdings weniger stark verfeinert.

Die in Kapitel 9 auf Basis der physikalischen Indikatoren adaptierten Simulationen wurden unter Wahl verschiedener  $\beta$  mehrfach durchgeführt. Eine Parameter-Studie hierzu findet sich in Abschnitt 9.2.1.

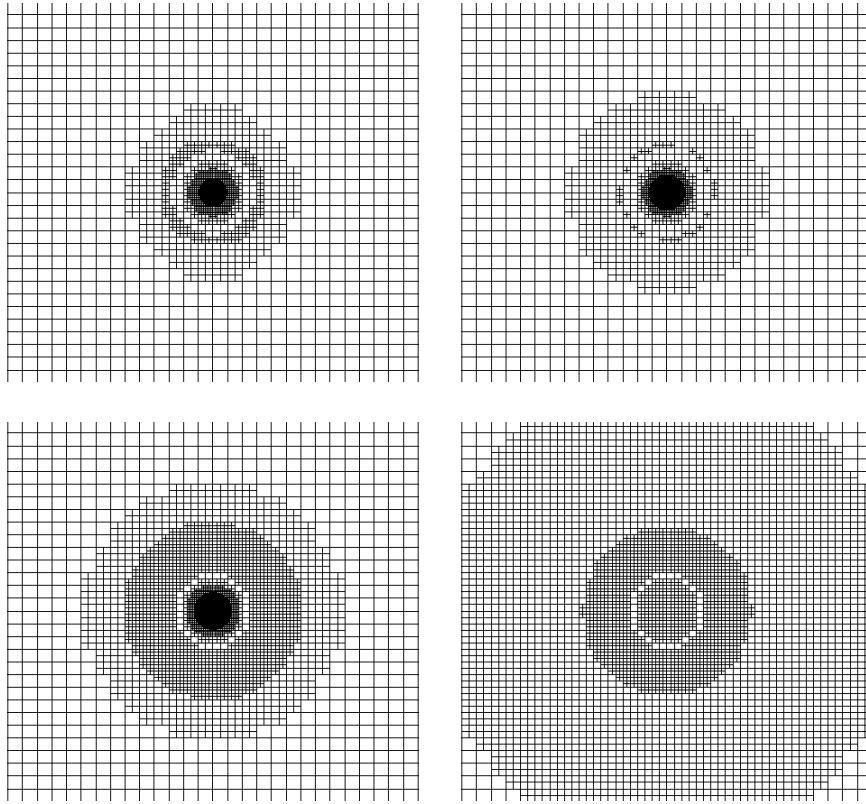


Abbildung 8.1: Adaptiertes Gitter nach 6 Adaptions-Zyklen. Vorticity-Indikator.  $\beta = 1$  (links oben),  $\beta = 2$  (rechts oben),  $\beta = 4$  (links unten),  $\beta = 16$  (rechts unten).

### 8.1.2 Mathematisch motivierte Adaptivität

Die mathematisch motivierte Adaptivität basiert auf der Idee, die Lösung lokal an den Stellen zu verbessern, an denen die Fehlerbeiträge besonders groß sind. Dazu wird zunächst eine Rechnung auf einem groben, provisorischen Gitter durchgeführt. Über die approximierte Lösung auf dem groben Gitter lässt sich *a posteriori*, also im Nachhinein, eine Aussage über den Fehler auf jeder einzelnen Zelle machen. Auf Basis dieser Information lässt sich das Gitter dann verfeinern. Bis ein optimales Gitter erzeugt wurde, bei dem der Fehler in jedem Element etwa gleich groß ist, muss obiger Prozess gegebenenfalls mehrfach wiederholt werden.

#### 8.1.2.1 A posteriori Fehlerschätzer

Die Abschätzung des Fehlers über a posteriori Schätzer erfordert keine Kenntnis der exakten Lösung, sondern nur Kenntnis der diskreten Lösung selbst:

$$\|u - u_h\| \leq \|D(u_h)\|,$$

wobei  $D(u_h)$  eine Funktion der diskreten Lösung ist. Die Abschätzung kann also ausschließlich a posteriori, also im Nachhinein, erfolgen. Der Fehler kann dabei in unterschiedlichen Normen gemessen werden, sehr geläufig ist die Norm des Sobolovraums  $H_0^1$ , die sogenannte Energienorm

$$\|u - u_h\|_E = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}.$$



Eine Übersicht über fünf populäre Ansätze für a posteriori Fehlerschätzer findet sich in Braess [6, S. 166ff.]. In dieser Arbeit wird ausschließlich der hier vorgestellte residuale Fehlerschätzer nach Babuška und Rheinboldt verwendet. Die Herleitung erfolgt in Anlehnung an [6].

### Residuale Schätzer

Als erstes Beispiel dient die Poisson-Gleichung  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  mit homogenen Dirichlet-Rändern  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Gesucht ist die Lösung  $u \in V = H_0^1(\Omega)$ .

Das kontinuierliche Problem wird numerisch approximiert durch eine diskrete Finite Elemente Lösung  $u_h$  mit  $u_h \in V_h \subset V$ . Das Gebiet  $\Omega$  wird zerlegt in eine quasiuniforme Triangulierung  $T_h$  von  $\Omega$ .

Der Diskretisierungsfehler der diskreten Lösung für die Zelle  $K$  lässt sich aufteilen in ein flächenbezogenes Residuum  $R_K$  und kantenbezogene Sprünge  $R_{\Gamma_K}$ , wobei  $\Gamma_K$  die Menge aller Kanten des Elements  $K \in T_h$  ist. Die kantenbezogenen Sprünge entstehen durch Sprünge der Ableitungen an den Elementgrenzen.

Das Residuum der diskreten Lösung  $u_h$  ist definiert durch

$$R_K(u_h) := (f + \Delta u_h)|_K \quad \forall K \in T_h,$$

man erhält es durch Einsetzen der diskreten Lösung in das kontinuierliche Problem.

Die kantenbezogenen Sprünge berechnen sich aus der Differenz der Flüsse in Normalenrichtung über eine Kante (in 2D) bzw. eine Fläche (in 3D). Der Kantensprung einer gemeinsamen Elementkante  $e$  eines Elements  $K$  und seinem Nachbarn  $K'$  ist

$$\begin{aligned} R_e(u_h) &:= [\partial_n u_h]_e & \forall e \in \Gamma_K \\ [\partial_n u_h]_e &= [\nabla u_h \cdot \vec{n}]_e := \left( \nabla u_h|_{K' \cap e} - \nabla u_h|_{K \cap e} \right) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

wobei  $\vec{n}$  der Normalenvektor des Elements  $K$  ist. Der Normalenvektor des benachbarten Elements ist dann schlussfolglich  $\vec{n}' = -\vec{n}$ .

Der geschätzte Fehler  $\eta_K$  auf einem Element  $K$  setzt sich zusammen aus dem Residuum und den Sprüngen,

$$\eta_K := \left\{ h_K^2 \|R_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_K} h_K \|R_e\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h.$$

$h_K$  kennzeichnet die Kantenlänge des Elements  $K$ , der bei Verwendung von Viereck-Elementen gleich der Länge der Kante  $e \in \Gamma_K$  ist.

Da über die Elemente und nicht über die Kanten summiert wird, werden die Sprünge mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  gewichtet. Bei periodischen Gebieten wird so jeder Kantensprung genau einmal mit einbezogen, da eine Kante in diesem Fall immer genau zwei angrenzende Elemente besitzt.

Der globale Fehler  $\eta$  lässt sich abschätzen über

$$\|u - u_h\|_{E,\Omega} \leq c_1 \eta, \quad \eta := \left\{ \sum_{K \in T_h} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\eta_K \leq c_2 \left\{ \|u - u_h\|_{E, \omega_K}^2 + \sum_{K' \in \omega_K} h^2 \|f - f_h\|_{L^2, K'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $c = c(\Omega, \kappa)$  eine Konstante in Abhängigkeit des Gebiets  $\Omega$  und des Regularitätsparameters  $\kappa$  ist.  $\omega_K$  bezeichnet die Vereinigung des Elements  $K$  und seiner Nachbarn. Beweise beider Abschätzungen finden sich im Buch von Braess [6, S. 169].

### Residualer Schätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen

Auch für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

mit Dirichlet-Randbedingungen  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ , lässt sich ein residualer Fehlerschätzer herleiten, der sich auch bei zeitabhängigen Problemen anwenden lässt. Die Fehlerbeiträge setzen sich wieder aus flächenbezogenen Residuen und kantenbezogenen Sprüngen zusammen. Zusätzlich kommt noch ein weiterer Term hinzu, welcher die Fehlerbeiträge der geforderten Divergenzfreiheit berücksichtigt:

$$R_{K,div}(u_h) := (\nabla \cdot \vec{u}_h)|_K \quad \forall K \in T_h.$$

Die zellweisen Flächenresiduen der diskreten Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sind

$$R_k(u_h) := \left( f + \nu \Delta \vec{u}_h - (\vec{u}_h \cdot \nabla) \vec{u}_h - \frac{1}{\rho} \nabla p_h \right)|_K \quad \forall K \in T_h,$$

die kantenbezogenen Sprünge sind wieder

$$R_e(u_h) := [\partial_n u_h]_e \quad \forall e \in \Gamma_K.$$

Der geschätzte Fehler je Element ist dann

$$\eta_K := \left\{ h_K^2 \|R_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_K} h_K \|R_e\|_{L^2(e)}^2 + \|R_{K,div}\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h.$$

Auch hier lässt sich der globale Fehler abschätzen über

$$\|u - u_h\|_{E, \Omega} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \eta, \quad \eta := \left\{ \sum_{K \in T_h} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\eta_K \leq c_2 \left\{ \|u - u_h\|_{E, K}^2 + \|p - p_h\|_{L^2(K)}^2 + \mathcal{O}(h^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h.$$

Der Beweis hiervon findet sich in Verfürth [22].

### 8.1.2.2 Zielorientierte Adaptivität

Mit Hilfe der bisher vorgestellten residualen Fehlerschätzer kann das Gitter so angepasst werden, dass der Fehler der approximierten Lösung in einer gewissen globalen Norm minimiert wird. Das Gitter wird also so verfeinert, dass die Lösung möglichst genau wird. Für viele Anwendungen ist der Fehler der Lösung, gemessen in globalen Normen, von untergeordnetem Interesse. Stattdessen interessiert der Fehler im Hinblick auf ein physikalisches Funktional  $J$ , z.B. einer lokalen Größe.

Zur Anschauung dient das folgende Beispiel: Eine zweidimensionale Geschwindigkeitsverteilung wird simuliert mit Hilfe eines entsprechenden numerischen Modells. In jedem Schritt wird der a posteriori Fehler der Lösung, also der Fehler der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$ , berechnet. Auf Basis dieser Information wird das Gitter so verfeinert, dass lokale Fehlerbeiträge einen Schwellwert nicht überschreiten. Die auf dem adaptierten Gitter berechnete Lösung  $u$  und  $v$  sollte nun genauer sein. Das bedeutet aber nicht automatisch, dass der Fehler in  $J$  damit ebenfalls geringer ist. Bestrebt man die Gitter-Adaption stattdessen so, dass man sie direkt auf das Ziel  $J$  auslegt, so wird das resultierende adaptierte Gitter im Hinblick auf dieses Ziel effizienter sein. Die Steuerung der Gitter-Adaption wird dann nicht mehr anhand des Fehlers der Lösung in einer globalen Norm, sondern bezüglich des Zielfunktionals durchgeführt.

Die Klasse der *zielorientierten Fehlerschätzer* berechnet also a posteriori den Fehler eines Zielfunktionals  $J$ ,  $|J(u) - J(u_h)|$ . Die Sensitivität dieses Fehlers auf lokale Fehlerquellen kann in der Regel nicht zufriedenstellend durch globale Stabilitätskonstanten dargestellt werden. Stattdessen verwendet man Dualitäts-Techniken, bei denen die Sensitivität über lokale Faktoren dargestellt wird. Lokale Fehler des Zielfunktionals werden dazu mit Gewichten multipliziert, die die Abhängigkeit des Fehlers auf die lokalen Residuen des Zielfunktionals beschreiben. Die lokalen Residuen lassen sich wiederum über eine Gitterverfeinerung oder -vergrößerung steuern. Die Gewichte erhält man dann durch die numerische Berechnung eines linearen *adjungierten Problems* in einem anderen Finite Elemente Raum.

Dieser Ansatz der so genannten *Dual Weighted Residual Method* geht zurück auf Becker und Rannacher [23]. Anders als der residuale Fehlerschätzer, der sich auf den Fehler der Lösung  $u - u_h$  in einer globalen Norm bezieht, bietet dieser Fehlerschätzer Informationen über den lokalen Fehler eines Funktionals  $|J(u) - J(u_h)|$ , indem das Residuum  $\rho(u_h)$  gewichtet wird mit der Sensitivität  $\omega_h(z)$  des Zielfunktionals auf lokale Fehlerquellen:

$$|J(u) - J(u_h)| \approx (\rho(u_h), \omega_h(z)).$$

$z$  ist die Lösung des adjungierten Problems.

#### Herleitung

Gegeben seien eine Bilinearform  $A(\cdot, \cdot)$  und ein lineares Funktional  $F(\cdot)$ , beide seien in einem Funktionenraum  $V$  definiert. Gesucht ist die Lösung von

$$A(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in V, \quad (8.1)$$

unter der Nebenbedingung, dass das Funktional  $J(u)$  minimiert wird.

$$J(u) = \min!$$

Es handelt sich damit um ein Optimierungsproblem  $J(u) \stackrel{!}{=} \min$ .

Die kontinuierliche Lösung  $u \in V$  wird approximiert durch eine Galerkin-Lösung  $u_h \in V_h \subset V$ ,

$$A(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (8.2)$$

unter der Nebenbedingung, dass  $J(u) \stackrel{!}{=} \min$ .

Verfeinert werden soll dort, wo die lokalen Beiträge des Fehlers  $|J(u_h) - J(u)|$  entstehen. Obiges Optimierungsproblem (8.1) lässt sich auch als Lagrange'sches Funktional darstellen:

$$L(u, z) := J(u) + F(z) - A(u, z) \quad \forall z \in V.$$

Die minimale Lösung  $u$  entspricht den stationären Punkten des Lagrange'schen Funktionals,

$$\frac{dL(u, z)}{du} = \frac{dJ(u)}{du} \Big|_{\varphi} - \frac{dA(u, z)}{du} \Big|_{\varphi} = 0 \quad \forall \varphi \in V$$

und

$$\frac{dL(u, z)}{dz} = \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{\varphi} - \frac{dA(u, z)}{dz} \Big|_{\varphi} = 0 \quad \forall \varphi \in V. \quad (8.3)$$

Da  $F$  und  $A$  linear bzw. bilinear in  $z$  und  $u$  sind, vereinfacht sich Gleichung (8.3) zum Ausgangsproblem (8.1):  $F(\varphi) = A(u, \varphi)$ .

Gesucht ist dann die Lösung  $(u, z) \in V^2$  des Euler-Lagrange'sche Systems

$$\begin{aligned} A(u, \varphi) &= F(\varphi) & \forall \varphi \in V \\ \frac{dJ(u)}{du} \Big|_{\varphi} &= \frac{dA(u, z)}{du} \Big|_{\varphi} & \forall \varphi \in V_h. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Neben der diskreten Lösung von Gleichung (8.1), die durch Gleichung (8.2) definiert ist, muss nun noch eine diskrete Formulierung des adjungierten Problems (8.4) gelöst werden,

$$\frac{dJ(u_h)}{du_h} \Big|_{\varphi_h} = \frac{dA(u_h, z_h)}{du_h} \Big|_{\varphi_h} \quad \forall \varphi_h \in V,$$

Das Residuum  $R$  von  $u_h$  ist definiert durch

$$R(u_h, \varphi) := F(\varphi) - A(u_h, \varphi) \quad \forall \varphi \in V,$$

das Residuum der adjungierten Lösung  $z$  ist

$$R^*(z_h, \varphi) := \frac{dJ(u_h)}{du_h} \Big|_{\varphi} - \frac{dA(u_h, z_h)}{du_h} \Big|_{\varphi} \quad \forall \varphi \in V. \quad (8.5)$$

Gemäß Becker und Rannacher [23] lässt sich der Fehler der Galerkin-Approximation im Zielfunktional durch einen a posteriori Fehlerschätzer

$$J(u) - J(u_h) = \frac{1}{2} \min_{\varphi_h \in V_h} R(u_h, z - \varphi_h) + \frac{1}{2} \min_{\varphi_h \in V_h} R^*(z_h, u - \varphi_h) + \text{Rest} \quad (8.6)$$

darstellen. Im Allgemeinen ist die Differenz zwischen  $\min_{\varphi_h \in V_h} R(u_h, z - \varphi_h)$  und  $\min_{\varphi_h \in V_h} R^*(z_h, u - \varphi_h)$  quadratisch in  $u - u_h$ , damit meist sehr klein und folglich vernachlässigbar:

$$J(u) - J(u_h) \approx \min_{\varphi_h \in V_h} R(u_h, z - \varphi_h) + \text{Rest.}$$

Für bilineares  $A$  enthält der Rest-Term nur noch Ableitungen dritter Ordnung von  $J(\cdot)$ . Ist  $J(\cdot)$  weiter quadratisch, so verschwindet der Rest-Term,

$$J(u) - J(u_h) \approx \min_{\varphi_h \in V_h} R(u_h, z - \varphi_h).$$

Im Fall eines linearen Funktionals  $J(\cdot)$  sind die Residuen  $R$  und  $R^*$  sogar identisch und es gilt Gleichheit,

$$J(u) - J(u_h) = \min_{\varphi_h \in V_h} R(u_h, z - \varphi_h).$$

Der ursprüngliche Fehlerschätzer (8.6) lässt sich dann also erheblich vereinfachen.

Als Beispiel dient nun wieder die Poisson-Gleichung  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  und  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Analog zum residualen Fehlerschätzer kann das Residuum hier wieder aufgeteilt werden in einen flächenbezogenen Anteil und Anteile durch Sprünge an den Elementkanten. Für den Fall periodischer Ränder sind die Anteile

$$\begin{aligned} R_K(u_h) &:= (f + \Delta u_h)|_K && \forall K \in T_h, \\ R_{\Gamma_K}(u_h) &:= \sum_{e \in \Gamma_K} [\partial_n u_h]_e && \forall \Gamma_K, \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma_K$  wieder die Menge aller Kanten des Elements  $K$  bezeichnet. Der gesamte Fehler in  $J$  setzt sich also zusammen aus den Beiträgen einzelner Zellen

$$J(u) - J(u_h) := \sum_{K \in T_h} \{(R_K(u_h), z - \varphi_h)|_{L^2(K)} - (R_{\Gamma_K}(u_h), z - \varphi_h)|_{L^2(\Gamma_K)}\}. \quad (8.7)$$

Der resultierende a posteriori Fehlerschätzer ist dann

$$|J(u) - J(u_h)| \leq \eta := \sum_{K \in T_h} \rho_K \omega_K,$$

wobei die elementweisen Residuen  $\rho_K$  und die Gewichte  $\omega_K$  definiert sind durch

$$\begin{aligned} \rho_K &:= \|R_K(u_h)\|_K + h_K^{-1/2} \|R_{\Gamma_K}(u_h)\|_{\Gamma_K}, \\ \omega_K &:= \|z - \varphi_h\|_K + h_K^{1/2} \|z - \varphi_h\|_{\Gamma_K}. \end{aligned}$$

### Auswertung

Nachdem nun ein zielorientierter Fehlerschätzer hergeleitet worden ist, stellt sich die Frage, wie dieser ausgewertet werden soll. Zur Auswertung von Gleichung (8.7) ist zum einen die diskrete Lösung  $u_h$ , zum anderen die diskrete Lösung des adjungierten dualen Problems  $z_h$ , sowie deren kontinuierliche Lösung  $z$  erforderlich. Letztere ist natürlich nicht bekannt, daher werden in der Praxis häufig Approximationen  $z \approx Z$  eingesetzt. Die Wahl  $Z := z_h \in$

$V_h$  ist jedoch ungeeignet, da dann das Residuum aufgrund der Galerkin-Orthogonalität  $R(u_h, z_h - \varphi_h) = 0$  wäre.

In dieser Arbeit wurde folgender Ansatz gewählt: Die diskrete Lösung  $z_h$  wird als Finite Elemente Approximation von  $z$  auf dem gegenwärtigen Gitter berechnet. Man nimmt an, dass man eine verbesserte Approximation erhält, wenn man  $z$  Patch-weise in einen Finite Elemente Raum höherer Ordnung interpoliert.  $z_h$  wird deshalb ersetzt durch eine Projektion  $Z := i_h^+ z_h$  von  $z_h$ , bei der die vorhandenen Freiheitsgrade auf einem Patch von Zellen neu interpretiert werden [23], siehe Abbildung 8.2.

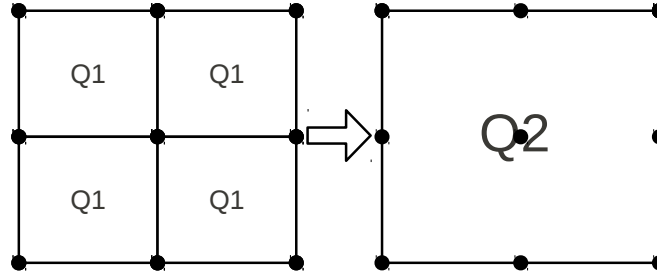


Abbildung 8.2: Patch-weise Interpolation einer diskreten Funktion aus dem Raum linearer Funktionen in den Raum quadratischer Funktionen.

Der Fehler ist damit

$$J(u) - J(u_h) := \sum_{K \in T_h} \{(R_K(u_h), i_h^+ z_h - z_h)_{L^2(K)} - (R_{\Gamma_K}(u_h), i_h^+ z_h - z_h)_{L^2(\Gamma_K)}\}.$$

## 8.2 Adaption-Strategien

Im vorigen Abschnitt wurde skizziert, nach welchen Kriterien Triangulierungen verfeinert bzw. vergrößert werden können, in Abschnitt 3.1.4 wurde bereits erläutert, was eine *Verfeinerung* bedeutet. Welche und vor allem wieviele Zellen nun konkret angepasst werden sollen, ist aber noch immer nicht festgelegt. Hierfür gibt es unterschiedliche Ansätze, die alle dasselbe Ziel vor Augen haben: Eine möglichst exakte Lösung bei möglichst geringem Aufwand. Eine Möglichkeit, dieses Ziel zu erreichen, besteht darin, den Indikator im Laufe mehrerer Adaption-Zyklen so auszubalancieren, dass die Indikatorwerte  $\eta_K$  für alle Zellen aus  $T_h$  innerhalb eines bestimmten Bereiches liegen. Verwendet man mathematische Fehlerschätzer als Indikator, ist dieses Ziel naheliegend: Verfeinert man eine Zelle, sinkt der Fehlerbeitrag, vergrößert man sie, steigt er. Bei der Verwendung physikalischer Indikatoren ändert sich die physikalische Größe auf einem adaptierten Gitter selbst nicht. Verfeinert man nun immer dort, wo die physikalische Größe eine bestimmte Eigenschaft besitzt (z.B. maximal ist), würde man in jedem Adaption-Zyklus das gleiche Gebiet verfeinern. Damit dennoch für alle Indikatoren die selbe Adaption-Strategie verwendet werden kann, wurden in Abschnitt 8.1.1 bereits physikalische Indikatoren definiert, die in Korrelation mit der Gitterweite stehen. Diese wurden so festgelegt, dass die Indikatorwerte mit steigender Gitterauflösung sinken. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die im Folgenden am Beispiel von Fehlerschätzern skizzierten Adaption-Strategien auch zur Steuerung der Gitteradaption über physikalische Kriterien anwenden.

Wir nehmen an, dass sich der a posteriori Fehler  $\eta_K$  auf jeder Zelle  $K \in T_h$  lokal berechnen lässt. Ein möglicher Ansatz für die Steuerung der Gitter-Adaption ist die Verfeinerung derjenigen Zellen, deren lokaler Fehler größer als ein bestimmter Schwellwert ist. Der

Schwellwert  $\eta_{ref}$  kann zum Beispiel definiert werden durch den maximalen Beitrag aller Zellen  $\eta_{max} = \max_{i=1:N}(\eta_{K_i})$ , multipliziert mit einer Fehlertoleranz  $\gamma_{ref}$ , mit  $0 \leq \gamma_{ref} \leq 1$ :

$$\eta_{ref} = \eta_{max} \cdot \gamma_{ref}.$$

Alle diejenigen Zellen, deren Fehlerbeitrag größer als der Schwellwert ist, d.h.  $\eta_K > \eta_{ref}$ , werden verfeinert. Da während der Adaption nur Zellverfeinerungen durchgeführt werden, steigt die Anzahl an Zellen mit jedem Adaptions-Zyklus an.

Ein anderer Ansatz versucht die einzelnen Fehlerbeiträge möglichst so auszubalancieren, dass die geschätzten Fehlerbeiträge jeder Zelle gleich verteilt sind, während die Anzahl an Zellen konstant bleibt. Der globale Fehler  $\eta$  sei definiert durch die p-Norm des Vektors der lokalen Fehlerbeiträge  $\eta_K$  der  $N$  Zellen:

$$\eta = \|\eta_{K_{1:N}}\|_p = \left( \sum_{i=1:N} \eta_{K_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das Gitter soll so angepasst werden, dass die einzelnen Fehlerbeiträge  $\eta_K$  gleich verteilt sind mit  $\eta_K = \bar{\eta}$ . Damit gilt

$$\left( \sum_{i=1:N} \eta_{K_i}^p \right)^{\frac{1}{p}} = (N\bar{\eta}^p)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{p}}\bar{\eta}.$$

Soll der globale Fehler geringer sein als ein Schwellwert  $\eta_{ref}$ , dann ist  $\bar{\eta} = \frac{\eta_{ref}}{N^{\frac{1}{p}}}$ . Eine Zelle muss also verfeinert werden, wenn ihr Fehlerbeitrag  $\eta_K > \frac{\eta_{ref}}{N^{\frac{1}{p}}}$  ist.

Bislang wurde ausschließlich von einer Verfeinerung der Triangulierung gesprochen. Für zeitabhängige, lokale Phänomene ist häufig auch eine Vergrößerung vorteilhaft. Bewegt sich ein Wirbel zum Beispiel von einem verfeinerten Gebiet weg, so ist es im Rahmen der Effizienz sinnvoll, dieses Gebiet nach einer Weile wieder zu vergrößern. Wir definieren wieder einen Schwellwert

$$\eta_{crs} = \eta_{max} \cdot \gamma_{crs}$$

und vergrößern alle diejenigen Zellen, deren Fehlerbeitrag geringer ist als dieser Schwellwert, d.h.  $\eta_K < \eta_{crs}$ . Für die Fehlertoleranz zur Vergrößerung  $\gamma_{crs}$  muss  $0 \leq \gamma_{crs} < \gamma_{ref}$  gelten. Bei der Wahl der Verfeinerungs- und Vergrößerungs-Schwellwerte ist Vorsicht geboten: Bei ungeschickter Wahl von  $\gamma_{crs}$  und  $\gamma_{ref}$  kann sich auf einzelnen Elementen eine Oszillation zwischen Verfeinerung und Vergrößerung ergeben, wie im Buch von Behrens [19, S. 14ff.] beschrieben wird.

Das adaptierte Gitter muss weiterhin die Bedingung der 1-Irregularität erfüllen, welche auch über die periodischen Grenzen hinweg gewährleistet sein muss.

### 8.2.1 1-Irregularität des Gitters

Beim h-Verfeinern eines Gitters, welches nur aus Viereck-Elementen besteht, entstehen sogenannte *hängende Knoten*. Teilt ein hängender Knoten eine Kante im Verhältnis 1:1 und sind die beiden Eckpunkte der Kante reguläre Knoten, handelt es sich um einen 1-irregulären Knoten (siehe hervorgehobene Knoten in Abbildung 8.3).

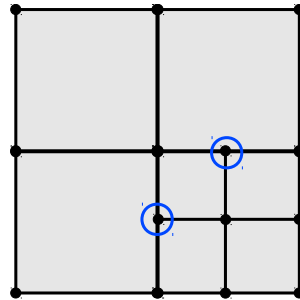


Abbildung 8.3: 1-irreguläre hängende Knoten.

Nun sollen Basisfunktionen für den neuen Finite-Elemente-Raum auf dem adaptierte Gitter gefunden werden. An den hängenden Knoten besitzen die feinen Elemente nun aber *unechte* Freiheitsgrade. Existieren nur 1-irreguläre und reguläre Knoten, so lassen sich die Basisfunktionen des verfeinerten Raums über Interpolationen an den beiden auf der selben Kante liegenden regulären, *echten* Freiheitsgraden bestimmen. Zur Gewährleistung glatter Übergänge an den Elementkanten müssen alle hängenden Knoten 1-irregulär sein.

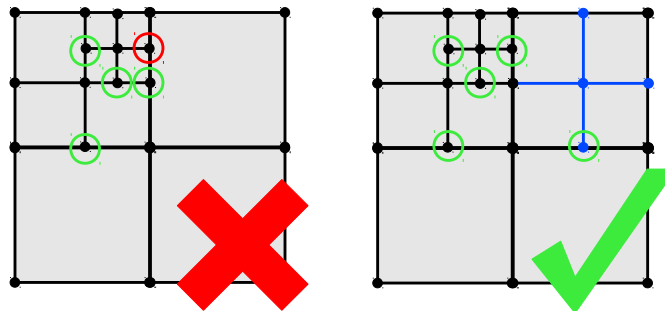


Abbildung 8.4: Nicht erlaubte Verfeinerung (links), erlaubte Verfeinerung (rechts). Grün markiert sind 1-irreguläre Knoten, rot sind nicht 1-irreguläre Knoten.

### 8.2.2 Fixed Mesh-Fraction Strategy

Bei den adaptiven Simulationen in dieser Arbeit werden ausschließlich statische Gitter eingesetzt, bei dem die Prozesse nicht dynamisch verfolgt werden. Erst am Ende der Zeit wird das Gitter adaptiert, das simulierte Problem wird im nächsten Adaptions-Zyklus auf dem adaptierten Gitter gelöst. Während der Simulation ändert sich das Gitter also nicht. In diesem Fall genügt es, Zellen zu verfeinern, eine Vergrößerung ist dann nicht zwingend notwendig. Die verwendete Strategie basiert deshalb auf einer Verfeinerung der Zellen, deren Indikatorwerte groß sind. Um verschiedene Adaptions-Kriterien miteinander vergleichen zu können, ist es sinnvoll, eine Strategie zu wählen, bei der die Anzahl der Zellen konstant bleibt oder nach einer bestimmten Anzahl an Adaptions-Zyklen erreicht wird.



Verwendet wird die *Fixed Mesh-Fraction Strategy* nach Becker und Rannacher [23], bei der jeweils  $p\%$  der Zellenanzahl auf dem aktuellen Gitter verfeinert werden. Die zellweisen Indikatorwerte  $\eta_K$  werden dazu der Größe nach geordnet. Die oberen  $p\%$  werden zur Verfeinerung markiert, also die Zellen, die die größten Indikatorwerte aufweisen.

Werden  $p\%$  aller Zellen eines im Adaptions-Zyklus  $i$  aus  $N(i)$  quadratischen Elementen bestehenden Gitters verfeinert, hat das resultierende Gitter im darauf folgenden Adaptionszyklus  $i + 1$

$$N(i + 1) = N(i)\left(1 - \frac{p}{100} + 4\frac{p}{100}\right) = N(i)\left(1 + 3\frac{p}{100}\right),$$

nach  $i$  Adaptions-Zyklen besitzt ein ursprünglich aus  $N_{start}$  bestehendes Gitter damit  $N(i) = N_{start}\left(1 + 3\frac{p}{100}\right)^{i-1}$  Zellen.

Damit das nach  $i$  Adaptions-Zyklen resultierende Gitter  $N_{opt}$  Zellen besitzt, muss das Startgitter also aus

$$N_{start}(i) = \frac{N_{opt}}{\left(1 + 3\frac{p}{100}\right)^{i-1}}$$

Zellen bestehen. Zu beachten ist, dass der Prozentsatz der zu verfeinernden Zellen durch die nachträglich erforderliche Regularisierung des Gitters in der Regel überschritten wird und die optimale Anzahl an Zellen nur bis zu einer gewissen Toleranz erreicht werden kann. Bei den in Kapitel 9 durchgeführten Simulationen liegt die Toleranz etwa bei  $\pm 10\%$ .

### 8.3 Aufwand und Mehrwert

Bevor im folgenden Kapitel 9 numerische Tests adaptiver Simulationen eines Sturm-Sturm-Szenarios präsentiert werden, sollen die verwendeten Adaptions-Kriterien miteinander verglichen werden.

Alle Kriterien zielen darauf ab, ein möglichst effizientes Gitter zu erzeugen. Die Effizienz des Gitters hängt dabei ab von der Qualität der Lösung und den erforderlichen Kosten:

$$\text{Effizienz} = \frac{\text{Qualität}}{\text{Kosten}}.$$

Die Qualität der Lösung lässt sich nicht im Vorhinein bestimmen. Anhand der in Kapitel 9 durchgeführten numerischen Tests, wird diese später abgeschätzt werden.

Um eine möglichst hohe Effizienz zu erzielen, ist eine geringe Rechenzeit wünschenswert. Aufgrund verschiedener Programmversionen und unterschiedlicher Hardware hat die Angabe absoluter Rechenzeiten wenig Aussagekraft. Die für die Adaptivität zusätzlich benötigte Rechenzeit wird deshalb durch den erforderlichen Rechenaufwand beschrieben. Ein weiterer Aspekt ist der erforderliche Speicherbedarf, welcher ebenfalls im Vorhinein abgeschätzt werden kann.

Um die Praxistauglichkeit der einzelnen Ansätze mitzuberücksichtigen, werden außerdem die Komplexität, sowie der Implementierungsaufwand für die einzelnen Indikatoren betrachtet.

### 8.3.1 Komplexität

Einen ersten, einfachen Hinweis auf die Komplexität der verwendeten Indikatoren bietet der Blick auf die Anzahl der Seiten, die deren Beschreibung und Herleitung bedarf. Da der Umfang der jeweiligen Herleitung stark vom fachlichen Hintergrund des Autors abhängt, ist dieser Hinweis jedoch nicht als globales Maß für die Komplexität des Indikators zu verstehen, sondern lediglich als subjektives Indiz.

Beim Ansatz der physikalisch motivierten Kriterien liegt die Herausforderung darin, aus den entsprechenden physikalischen Größen geeignete Indikatoren abzuleiten. Die Wahl des Indikators, insbesondere die Wahl des Indikator-Parameters  $\beta$ , definiert gleichzeitig das *optimale Gitter*. In diesem Zusammenhang muss außerdem eine passende Adaptions-Strategie gefunden werden, die zum jeweiligen Indikator passende, optimale Gitter erzeugt.

In ihrer Herleitung aufwendiger sind die beiden residualen Fehlerschätzer für das Laplace- und das Navier-Stokes-Problem. Im Hinblick auf die Adaptions-Strategie haben diese Schätzer einen deutlichen Vorteil gegenüber den physikalisch motivierten Ansätzen: Es besteht ein natürlicher Zusammenhang zwischen Zellgröße und resultierendem Fehler. Dadurch können Optimalitätsbedingungen für effiziente Gitter sowie Adaptions-Strategien abgeleitet werden.

Am komplexesten ist wohl der zielorientierte Fehlerschätzer nach der Dual Weighted Residual Method. Anders als bei den residualen Fehlerschätzern kann durch die Wahl des Zielfunktionals  $J$  direkt gesteuert werden, für welche Anwendung das Gitter optimiert wird. Zielorientierte Schätzer vereinen demnach physikalische Anforderungen an die Simulation mit mathematischen Ansätzen der Fehlerschätzung.

### 8.3.2 Rechenaufwand und Speicherbedarf

In der Regel kann die Auswertung eines physikalischen Kriteriums je Zelle in wenigen Gleitkommaoperationen erfolgen. Je nach Kriterium müssen dafür unterschiedliche Differentialoperatoren implementiert sein, z.B. der Gradient, die Rotation oder die Hesse-Matrix. In der Regel wird der Gradient bereits beim Assemblieren des Gleichungssystems des zu simulierenden diskreten Problems benötigt und bedarf keiner zusätzlichen Implementierung. Je nach Anwendung können weitere Differentialoperatoren bereits implementiert sein, was dem erforderlichen Implementierungsaufwand zugutekommt. Die Auswertung des Kriteriums muss nicht zwingend zu jedem diskreten Zeitpunkt erfolgen. Um den Rechenaufwand gering zu halten, können auch größere Zeitabstände gewählt werden. Als zusätzlich notwendiger Speicherbedarf ergibt sich eine Gleitkommazahl pro Zelle, in der der maximierte Indikatorbeitrag über die Zeit gespeichert wird.

Etwas rechenaufwändiger ist die Auswertung der beiden residualen Schätzer. Hierzu müssen der Gradient und die zweiten Ableitung implementiert sein, außerdem die Auswertung der Sprünge an den Elementkanten. Bei der Verwendung eines unstetigen Galerkin-Verfahrens zur räumlichen Diskretisierung wird letzteres ebenfalls bereits implementiert sein. Auch für diese Schätzer kann die Auswertung zu beliebig gewählten diskreten Zeitpunkten erfolgen, der zusätzliche Speicherbedarf entspricht wieder einer Gleitkommazahl je Zelle.

Sowohl den höchsten Rechenaufwand, als auch den größten Speicherbedarf hat der zielorientierte Fehlerschätzer. Zunächst muss das primale Problem vorwärts in der Zeit gelöst werden. Zu jedem Zeitpunkt muss die gesamte diskrete Lösung gespeichert werden. Im Anschluss wird das duale Problem rückwärts in der Zeit gelöst, in jedem Zeitschritt erfolgt

außerdem die zellweise Auswertung des Fehlerschätzers. Dieser benötigt Informationen der diskreten Lösung des primalen Problems, der diskreten Lösung des dualen Problems und deren patch-weisen Interpolation in einen Finite-Elemente-Raum höherer Ordnung. Nachdem der Fehlerschätzer für einen Zeitschritt ausgewertet ist, können primale und duale Lösung für diesen Zeitpunkt wieder gelöscht werden. Im Speicher bleiben müssen die primale Lösung für die vorherigen Zeitschritte und der maximale Indikatorwert für jede Zelle. Letzteres entspricht einem Speicheraufwand von einer Gleitkommazahl je Zelle. Anders als bei den bisher vorgestellten Indikatoren muss die primale Lösung zunächst jedoch zwingend für jeden Zeitschritt berechnet und gespeichert werden, bis sie rückwärts in der Zeit wieder zeitschrittweise freigegeben werden kann. Dies kann je nach Problemgröße einen enormen Speicherbedarf darstellen. Der Speicherbedarf kann gegebenenfalls durch sogenannte Checkpoint-Ansätze kontrolliert werden. Dies kann jedoch nur auf Kosten eines erhöhten Rechenaufwandes geschehen.

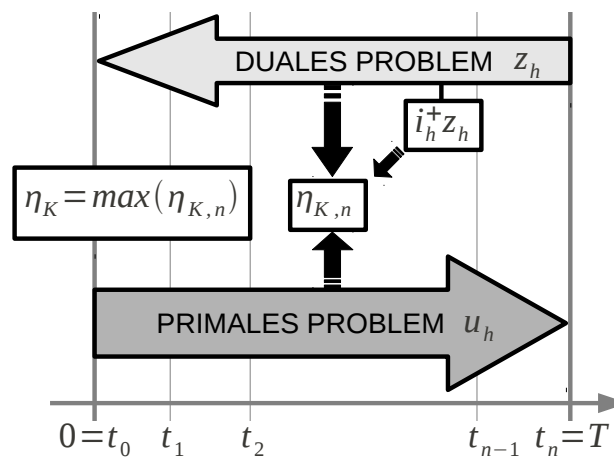


Abbildung 8.5: Auswertung des zielorientierten Dual Weighted Fehlerschätzers nach Becker und Rannacher [23].

Die Auswertung dieses Fehlerschätzers muss ebenfalls zu jedem Zeitpunkt erfolgen. Für das in diesem Kapitel simulierte Szenario erfordert das Lösen des dualen Problems – verglichen mit dem Lösen des primalen Problems – weniger Rechenaufwand: Da das duale Problem linear ist, entspricht der dazu nötige Rechenaufwand in jedem Zeitschritt dem Lösen eines Newton-Schrittes des nichtlinearen Problems. Im hier betrachteten Szenario waren im Durchschnitt vier Newton-Schritte notwendig, somit entspricht der Aufwand des dualen Problems circa ein Viertel des Aufwandes für das Lösen des nichtlinearen primalen Problems. Die patch-weise Interpolation der diskreten, dualen Lösung in den Finite-Elemente-Raum höherer Ordnung kann als Matrix-Vektor-Multiplikation umgesetzt werden. Zur Auswertung des Fehlerschätzers sind weitere Gleitkommaoperationen nötig, der Umfang entspricht ungefähr dem der Auswertung der residualen Schätzer. Insgesamt ergibt sich damit ein signifikant höherer Rechenaufwand.

Wie bei den residualen Schätzern ist auch beim zielorientierten Schätzer die Implementierung des Gradienten, der zweiten Ableitung und der Sprungterme erforderlich.



## 9. Numerische Tests II

Im vorigen Kapitel 8 wurden verschiedene Ansätze der räumlichen Adaptivität diskutiert. Bei allen in diesem Kapitel durchgeführten Simulationen wird die h-Adaptivität als Adaption-Technik gewählt, die dem Adaption-Prozess zu Grunde liegende Strategie ist eine *Fixed Mesh-Fraction Strategy* (siehe 8.2.2) nach Rannacher und Becker [23]. Das Ziel dieses Kapitels ist die Untersuchung unterschiedlicher Adaption-Kriterien. Unter Verwendung verschiedener Adaption-Indikatoren, werden adaptive Simulationen der Interaktion zweier Wirbelstürme durchgeführt und miteinander verglichen. Als Fehlermaß dient die Distanz der Endposition des Wirbels nach 96 h von einer Referenzposition. Diese wurde mittels eines hoch aufgelösten Referenzlaufes bestimmt und ist a priori bekannt.

### 9.1 Modell-Szenario: Sturm-Sturm-Interaktion

In diesem Kapitel soll die Interaktion zweier tropischer Wirbelstürme auf einem adaptierten Gitter simuliert werden. Für die Meteorologie stellt die Erforschung dieses Szenarios ein relevantes Problem für die Vorhersage von Zugbahnen dar, denn das Vorhandensein zweier interagierender Stürme erschwert die Vorhersagbarkeit deutlich [4]. Je nach Ausgangslage ergeben sich unterschiedliche Interaktionsmuster, deren Ursachen bislang noch nicht vollständig verstanden sind. Ein ausschlaggebender Faktor ist dabei die Anfangsdistanz der beiden Wirbel, wie sich durch zahlreiche numerische Simulationen bestätigen ließ (z.B. [3], [24] und [25]).

Bei den beiden hier simulierten Wirbeln handelt es sich wieder um SUD-Wirbel gemäß Smith et al. [17], deren Wirbelprofil wie in Abschnitt 6.1 beschrieben durch Gleichung (6.1) definiert ist. Die Größe des Rechengebiets für dieses Szenario ist  $[-2000, 2000] \times [-1732.1, 1732.1] \text{ km}^2$ . Ausschlaggebend für die Wahl der Gebietsgröße sind bereits durchgeführte zielorientiert adaptive Simulationen (Adaption-Kriterium Dual Weighted Residual Method, siehe [25]), die in den Vergleich miteinbezogen werden sollen. Die Ränder des Gebiets sind wieder periodisch. Die Startposition des ersten Wirbels zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $(x_{0,1} = -200 \text{ km}, y_{0,1} = 0 \text{ km})$ . Die Startposition des zweiten Wirbels hat einen Abstand von 400 km zum ersten Wirbel und befindet sich in  $(x_{0,2} = 200 \text{ km}, y_{0,2} = 0 \text{ km})$ .

Während der ersten Stunden umkreisen sich die beiden Wirbel. Die Anfangsdistanz von 400 km liegt in der Nähe des Bifurkationspunktes, der die verschmelzende von der nicht-verschmelzende Lösung trennt. Dieser Abstand ist abhängig von der Viskosität. Wie in

6.4 gezeigt wurde, setzt sich die Viskosität in HiFlow zusammen aus der physikalischen Viskosität und einer verfahrenseigenen, numerischen Dissipation, die den Energieverlust durch numerische Effekte beschreibt. Die numerische Dissipation hängt wiederum ab von der Gitterweite und der Zeitschrittweite. Die Abhängigkeit des kritischen Radius von der Viskosität impliziert also auch eine Abhängigkeit von der Gitterweite. Ist die Gitterweite zu grob, so reicht die räumliche Auflösung nicht mehr aus, um die Interaktion der Wirbel ausreichend darstellen zu können. In diesem Fall vereinen sich beide Wirbel zu einem Wirbel. Rechnet man auf einem feineren Gitter, entfernen sich die Wirbel voneinander, der Fehler in der Endposition nimmt ab.

Eine besondere Rolle spielt in diesem Kontext auch die negative Vorticity in den äußeren Bereichen des hier verwendeten SUD-Wirbelprofils, der die positive Zirkulation, die den eigentlichen Wirbel definiert, abschirmt. Auf diese Weise wird der Tendenz zur Verschmelzung der beiden Wirbel entgegen gewirkt und für hinreichend große Anfangsabstände können sich zwei Zyklon-Antizyklon-Paare bilden, die anschließend auseinander driften [26], [27]. Shin et al. [28] ermittelten 2006, dass es nur dann zu einer Separation der beiden Wirbel kommt, wenn im Anfangszustand negative Vorticity zwischen den Wirbeln liegt – das wird aber nur dann der Fall sein, wenn das Gitter fein genug aufgelöst ist. Der Einfluss der negativen Vorticity bringt somit eine weitere Abhängigkeit der Endposition der Stürme von der Gitterauflösung.

In Abbildung 9.1 und 9.2 sind die Zugbahn und der Fehler in der Endposition für uniforme Referenzsimulationen unterschiedlicher Problemgrößen abgebildet. Das Szenario reagiert also äußerst sensitiv auf zu grobe Gitterauflösungen, was seine Verwendung als Benchmark-Problem für adaptive Methoden in dieser Arbeit rechtfertigt.

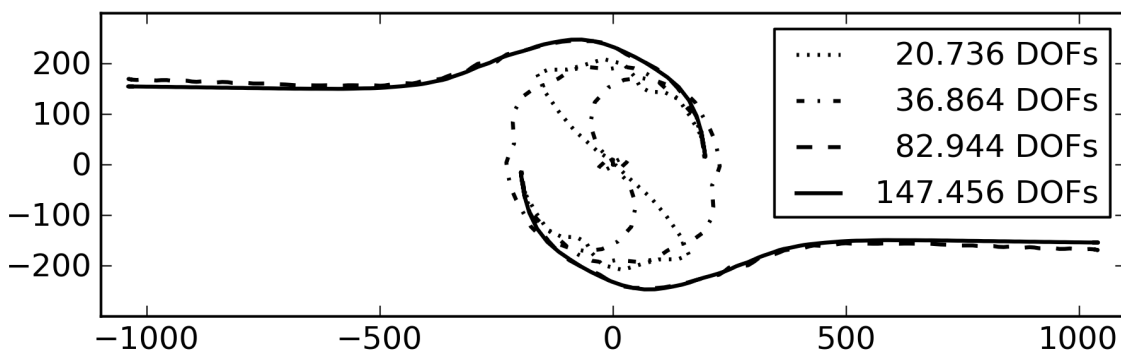


Abbildung 9.1: Abhängigkeit der Zugbahn von der Gitterauflösung für uniforme Referenzläufe bei einem kritischen Anfangs-Abstand von 400 km: Für hohe Gitterauflösungen konvergiert die Zugbahn, ist die Auflösung zu grob, vereinen sich beide Wirbel. Angabe der Gitterauflösung in DOFs (*degrees of freedom* = Anzahl der Freiheitsgrade).

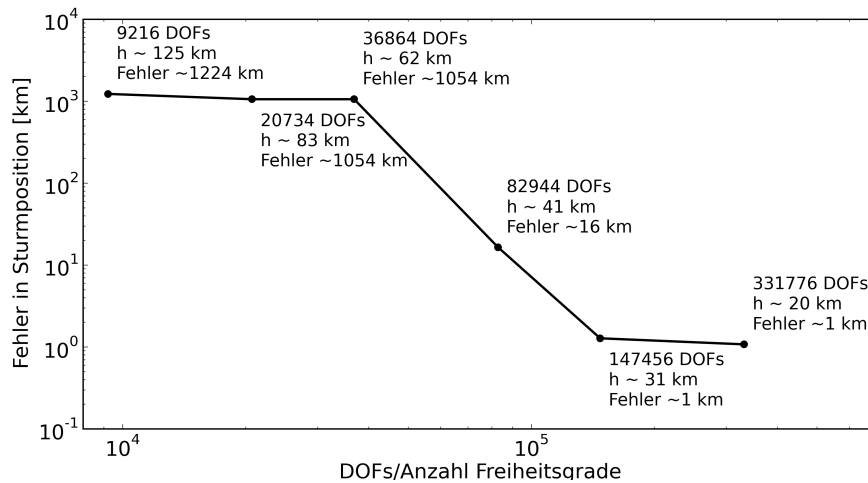


Abbildung 9.2: Fehler in der Endposition in Abhängigkeit von der Gitterauflösung für uniforme Referenzläufe.

## 9.2 Gitter-Adaption

Für die Indikatoren auf Basis der Vorticity und der Energie und für die beiden a posteriori Fehlerschätzer wird das gesamte Problem während eines Adaption-Zyklus vorwärts in der Zeit gelöst. Die Zeitschrittweite beträgt 300 s, für jeden 12-ten Zeitschritt, also stündlich, werden die Sturmposition und die zellweisen Indikatorwerte berechnet. Nach simulierten 96 h ist die Simulation für einen Adaption-Zyklus beendet. Es folgt eine Gitter-Adaption auf Basis der zeitlichen Maxima der Indikatorwerte jeder Zelle. Nach 7 Adaption-Zyklen hat das Gitter die optimale Anzahl an Zellen bis auf eine Toleranz von  $\pm 10\%$  erreicht und das Experiment endet. Auch bei der Verwendung des Dual Weighted Residual Fehler-

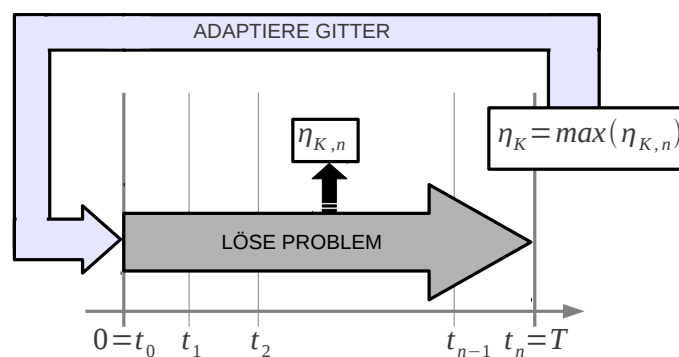


Abbildung 9.3: Adaption-Zyklus für den Vorticity- und Energie-Indikator, a posteriori Poisson Fehlerschätzer und a posteriori Navier-Stokes Fehlerschätzer.

schätzers erfolgt die Gitter-Adaption auf Basis der zeitlichen Maxima der Indikatorwerte. Diese können allerdings erst ausgewertet werden, wenn das gesamte Problem vorwärts und rückwärts in der Zeit gelöst wurde.

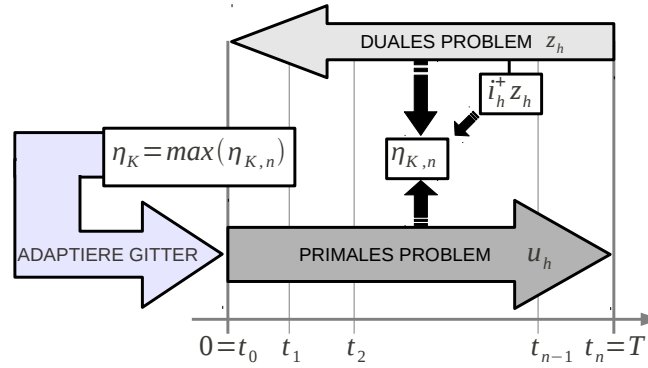


Abbildung 9.4: Adaptions-Zyklus für die Dual Weighted Residual Method nach Becker und Rannacher [23].

### 9.2.1 Indikatoren

#### Physikalisch motivierte Gitter-Adaption

Als physikalisch motivierte Adaptions-Kriterien werden die Vorticity und die Energie betrachtet. In Abschnitt 8.1.1 wurde für beide Kriterien ein Indikator abgeleitet. Als Vorticity-Indikator wurde

$$\eta_{K,\xi} = h_K^{\beta-2} \int_K \xi^2 dK \quad \forall K \in T_h,$$

als Energie-Indikator

$$\eta_{K,E} = h_K^{\beta-2} \int_K E_{kin} dK \quad \forall K \in T_h,$$

gewählt.

Wie bereits in Abschnitt 8.1.1 gezeigt wurde, hat die Wahl von  $\beta$  einen maßgeblichen Einfluss auf das resultierende adaptierte Gitter,  $\beta$  definiert das optimale Gitter. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass man in diesem Kontext eigentlich nicht mehr von einem *optimalen Gitter* sprechen kann. Ein optimales Gitter wäre erst dann erreicht, wenn alle die Adaption steuernden Indikatorwerte auf dem gesamten Gitter gleich verteilt wären. In der Praxis wird man dieser Zustand nicht erreichen, da der Adaptionsprozess nach einer festgelegten, endlichen Anzahl an Adaptionszyklen abgebrochen wird. Wenn also von einem *optimalen Gitter* die Rede ist, dann ist damit immer die durch eine endliche Anzahl von Adaptionszyklen erzeugte Nachahmung eines solchen Gitters gemeint.

Im hier betrachteten Szenario ist die Anforderung an dieses *optimale Gitter* die Minimierung des Positionsfehlers nach 96 h. Anhand der Parameter-Studie in Abbildung 9.5 für die Problemgröße von circa 60000 Freiheitsgraden zeigt sich die Abhängigkeit des Positionsfehlers von der Wahl von  $\beta$ .

Mit einer entsprechenden Wahl von  $\beta$  lässt sich der Positionsfehler also merklich verringern. Das Vorgehen ist allerdings tückisch: Mit der Wahl von  $\beta$  ist die grundsätzliche Frage verbunden, wie das optimale Gitter aussehen soll. Im hier betrachteten Fall ist dieses durch die Minimierung des Positionsfehlers definiert, in der Praxis wird das selten der Fall sein. Es zeigt sich außerdem, dass die Wahl von  $\beta$  für jedes Szenario, ja sogar für jede



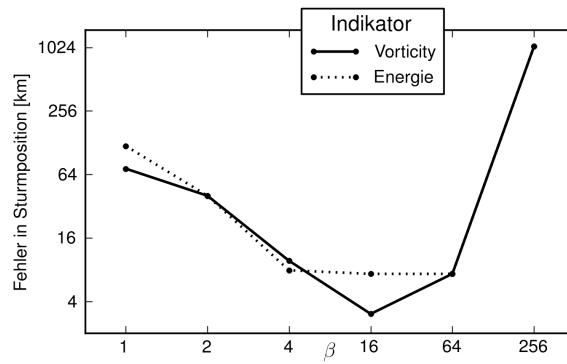


Abbildung 9.5: Fehler in der Sturmposition auf einem anhand des Vorticity- und des Energie-Indikators adaptierten Gitters mit 6000 Zellen in Abhängigkeit der Wahl von  $\beta$ .

Problemgröße neu getroffen werden muss. Letztendlich handelt es sich hierbei ebenfalls um einen zielorientierten Ansatz: Zunächst muss ein Ziel definiert werden, dann muss experimentell ermittelt werden, für welche Wahl von  $\beta$  das für dieses Ziel optimale Gitter resultiert.

Gemäß obiger Parameter-Studie 9.5 wurde für den Vorticity-Indikator  $\beta = 16$  gewählt. Beim Energie-Indikator wurde  $\beta = 2$  gewählt, da die Ergebnisse mit  $\beta = 4$  für andere Problemgrößen als 6000 Zellen deutlich schlechter waren.

### Mathematisch motivierte Gitter-Adaption

Die Herleitung eines residualen a posteriori Fehlerschätzers für das Poisson-Problem erfolgte in Abschnitt 8.1.2.1, analog dazu die Herleitung des Schätzers für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen. Der a posteriori Schätzer für die Poissongleichung

$$\eta_{K,P} = \left\{ h_K^2 \|R_{K,P}\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_K} h_K \|R_e\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h$$

setzte sich zusammen aus den Flächenresiduen  $R_{K,P}$  und den kantenbezogenen Sprüngen  $R_e$ .

Beim a posteriori Schätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\eta_{K,NS} = \left\{ h_K^2 \|R_{K,NS}\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_K} h_K \|R_e\|_{L^2(e)}^2 + \|R_{K,div}\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in T_h$$

kam ein weiterer Term  $R_{K,div}$  hinzu, welcher die Fehlerbeiträge der geforderten Divergenzfreiheit berücksichtigt.

Obwohl beide Fehlerschätzer für stationäre Probleme hergeleitet wurden, lassen sie sich auch auf instationäre Probleme anwenden, wie in der Dissertation von Schmich [29] beschrieben. Dass sich beide Fehlerschätzer sogar gleichermaßen dazu eignen, lokale Fehlerbeiträge des in diesem Kapitel betrachteten Problems abzuschätzen, wird in Abschnitt 9.3.2 ersichtlich.

### Zielorientierte Gitter-Adaption

Für den zielorientierten Dual Weighted Residual Ansatz, der in Abschnitt 8.1.2.2 hergeleitet wurde, resultierte eine a posteriori Fehlerschätzung in Abhängigkeit der elementweisen Residuen  $\rho_K$ , gewichtet mit der Sensitivität  $\omega_K$  eines zunächst abstrakt gehaltenen Zielfunktionals  $J$  auf lokale Fehlerquellen:

$$\eta_{K,DWR} = \rho_K \omega_K \quad \forall K \in T_h.$$

Die zellweisen Residuen  $\rho_K$  setzen sich wieder zusammen aus einem flächenbezogenen Residuum  $R_{K,DWR}$  und kantenbezogenen Sprüngen  $R_{\Gamma_K}$ :

$$\begin{aligned} \rho_K &:= \|R_{K,DWR}(u_h)\|_K + h_K^{-1/2} \|R_{\Gamma_K}(u_h)\|_{\Gamma_K}, \\ \omega_K &:= \|i_h^+ z_h - z_h\|_K + h_K^{1/2} \|i_h^+ z_h - z_h\|_{\Gamma_K}, \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma_K$  wieder die Summe aller Kanten  $e$  eines Elements  $K$  ist.

$z_h$  war die diskrete Lösung des dualen Problems, welche sich aus einem Zielfunktional  $J$  und dem Ausgangsproblem ableiten ließ.  $i_h^+$  entsprach der patch-weisen Interpolation in einen Finiten Elemente Raum höherer Ordnung. Das Zielfunktional  $J$  wurde bisher nicht weiter spezifiziert.

Die in dieser Arbeit betrachteten Simulationen auf Basis der zielorientierten Adaptivität wurden nicht selbst durchgeführt. Sie entstammen der Dissertation von Baumann [25] über die zielorientierte Adaptivität für die Simulation von tropischen Wirbelstürmen. Baumann strebt in seinen Simulationen eine möglichst genaue Vorhersage der Sturmposition einer der beiden Stürme nach 96 h an. Die Position des Sturms lässt sich auf verschiedene Art charakterisieren, eine Charakterisierung ist zum Beispiel die Position der maximalen Vorticity  $x_{pos} := \arg_{x \in \Omega} \max(\xi)$ . Der Nachteil hierbei ist, dass eine solche Funktion in der Zeit keine kontinuierliche Funktion sein muss – das Maximum der Vorticity könnte zum Beispiel von einem Sturm zum anderen springen, sobald dieser stärker geworden ist als der andere. Bereits minimale Änderungen können so einen großen Sprung des  $\arg_{x \in \Omega} \max(\xi)$  verursachen. Wie in Abschnitt 8.1.2.2 beschrieben, muss das Zielfunktional  $J$  jedoch mindestens drei mal differenzierbar sein. Da  $J(u(x)) = x_{pos} = \arg_{x \in \Omega} \max(\nabla \times u(x, 96 \text{ h}))$  diese Bedingung nicht erfüllen kann, wird stattdessen eine mit Abweichungen in der Sturmposition stark korrelierte Größe verwendet: Die über den Sturmkern integrierte Vorticity nach 96 h. Von Interesse ist der zu Beginn der Simulation rechte der beiden Stürme, integriert wird deshalb nur über den Kern des rechten Sturms. Der Sturmkern ist dabei definiert durch einen Kreis um einen Referenzsturm, der a priori mit einer hoch aufgelösten Referenzsimulation berechnet wurde. Dessen Zentrum und Radius sind bekannt,  $x_{ref} = (-1043.678 \text{ km}, 153.365 \text{ km})$  und  $r_{ref} = 93 \text{ km}$ , der Sturmkern ist dann

$$\gamma(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } \|x_{pos} - x_{ref}\|_{L^2} \leq r_{ref}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das resultierende Zielfunktional

$$J(u(x)) = \int_{\Omega} \gamma(x) (\nabla \times u(x, 96 \text{ h})) \, dx$$

korreliert immernoch stark mit dem Maximum der Vorticity, hat im Bezug auf die Glattheit aber den Vorteil, dreimal differenzierbar zu sein.

Bei der Wahl des Zielfunktionals interessiert hier nur die Position einer der beiden Stürme. Gegenüber den anderen Indikatoren bietet das einen großen Vorteil, denn die verfeinerten Zonen können sich auf die Zugbahn des einen Sturmes konzentrieren. Bei allen anderen Methoden müssen beide Zugbahnen gut aufgelöst werden. Die Effizienz dieses asymmetrischen Zielfunktionals kann höher als bei einem entsprechenden symmetrischen Zielfunktional, bei dem beide Stürme von Interesse sind, erwartet werden. Abbildung 9.6 zeigt hierzu einen Vergleich eines adaptierten Gitters mit 6000 Zellen, welches mit einem asymmetrischen und einem symmetrischen Zielfunktional gemäß [25] adaptiert wurde. Das symmetrische Zielfunktional berücksichtigt die Position beider Stürme. Der Sturmkern ist hier definiert durch den Bereich, in dem die Vorticity mindestens 50% der maximalen Vorticity zu einem Zeitpunkt beträgt.

Die Wahl des asymmetrischen Zielfunktionals führt also zwangsläufig zu einem unfairen Vergleich. Gleichzeitig macht sie aber auch deutlich, welche Vorteile durch die zielorientierte Adaptivität entstehen. Eine geringfügige Modifikation des Szenarios reicht bereits aus, um die anderen Kriterien möglicherweise zum Scheitern zu bringen – zum Beispiel wenn einer der beiden Wirbel stärker ist als der andere und das Ziel der Adaption darin besteht, die Vorhersage der Zugbahn des kleineren Wirbels zu optimieren. Es könnte sich sogar um einen Fall handeln, in dem der größere Sturm aufgrund seiner Lage einen verschwindenden Einfluss auf den kleineren Sturm hat. In diesem Fall würden alle anderen Indikatoren unnötige Stellen verfeinern. Nur der zielorientierte Fehlerschätzer ist in der Lage, sich auf das richtige Gebiet zu konzentrieren.

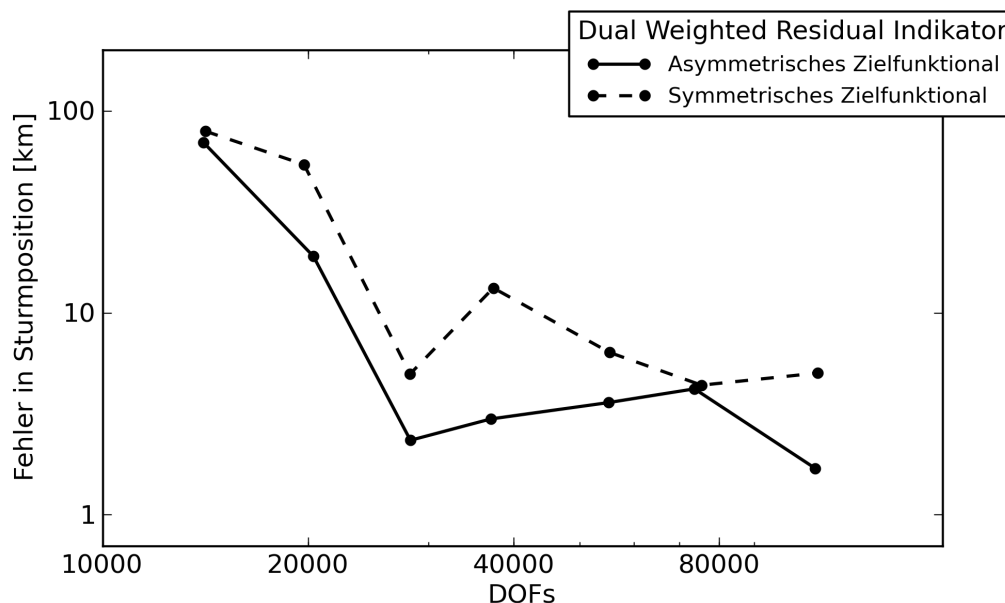


Abbildung 9.6: Fehler in der Endposition bei einer Simulation auf einem Gitters mit 6000 Zellen, adaptiert unter Verwendung eines symmetrischen bzw. eines asymmetrischen Zielfunktionals. Der resultierende Fehler ist beim asymmetrischen Zielfunktional für alle Problemgrößen geringer als beim symmetrischen Zielfunktional.

## 9.3 Auswertung

### 9.3.1 Adaptierte Gitter

Im Vergleich der Indikatoren, berechnet auf einem uniformen Gitter, sind bereits deutliche Unterschiede in der Auswahl der zu verfeinernden Zellen sichtbar:

Der Vorticity-Indikator 9.8a nimmt im Bereich zweier schmaler Bänder um die Zugbahnen der beiden Wirbel sehr hohe Werte an, mit zunehmendem Abstand von der Zugbahn fallen die Werte schnell ab. Der Energie-Indikator 9.8b markiert ebenfalls ein Band um die beiden Zugbahnen, dieses ist allerdings wesentlich breiter, der Gradient ist vergleichsweise schwach. Da der Wirbel im Laufe der Simulation an Intensität verliert – was eine Abschwächung der Vorticity und der Energie bedeutet – werden sowohl beim Vorticity- als auch beim Energie-Indikator vergleichsweise höhere Werte in der Nähe der Startpositionen indiziert.

Die höchsten indizierten Werte bei den beiden a posteriori Fehlerschätzern 9.8c und 9.8d liegen ebenfalls im Bereich der Startpositionen, wobei der Gradient beim Poisson-Schätzer in diesem Gebiet schwächer ist als beim Navier-Stokes-Schätzer. Entlang der Zugbahnen nehmen die Indikator-Werte deutlich ab. Auffällig ist bei beiden Fehlerschätzern, dass die Fehlerbeiträge benachbarter Zellen deutlich voneinander abweichen können.

Auch der Dual Weighted Residual Fehlerschätzer 9.9a indiziert hohe Werte im Bereich der Startposition, anders als alle bisherigen Indikatoren werden hier aber auch im Bereich der Endposition des ursprünglich rechten Wirbels hohe Werte indiziert. Die Fehlerbeiträge setzen sich zusammen aus dem jeweiligen Residuum  $\rho_K$  und dessen Gewicht  $\omega_K$ . Wie bereits beim a posteriori Fehlerschätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen sichtbar ist, nehmen die Residuen  $\rho_K$  im Laufe der Zeit ab. Nicht aber deren Gewichte  $\omega_K$ , die von der dualen Lösung  $z_h$  abhängen. Diese wird zu Beginn und zu Ende der Simulation groß, wie in Abbildung 9.7 gezeigt wird.

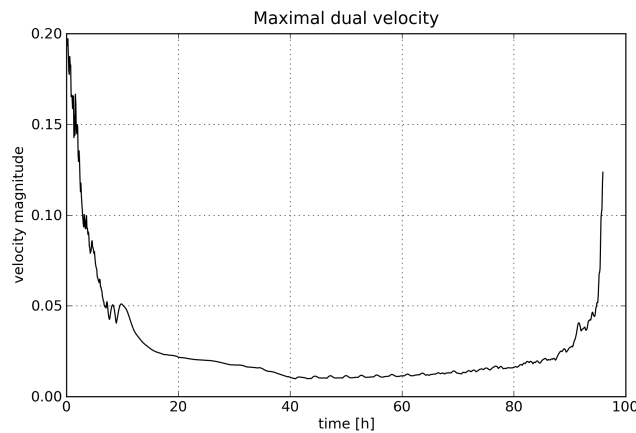
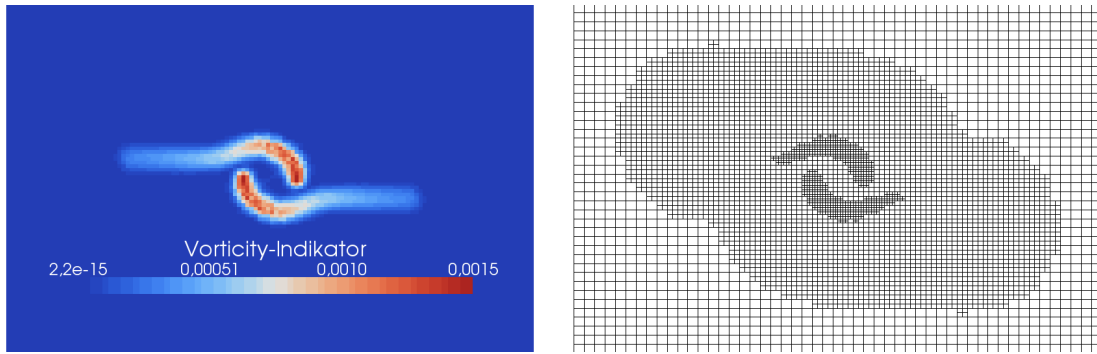
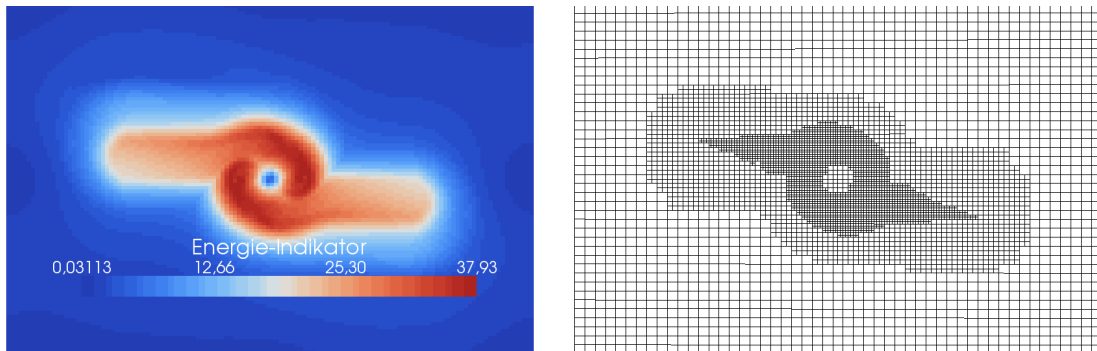


Abbildung 9.7: Zeitliche Entwicklung des Maximums der dualen Lösung  $\max_{x \in \Omega} \|z_h(x, t)\|$ . Zu Beginn und zu Ende der Simulation treten die höchsten Werte auf (Quelle: Baumann, [25]).

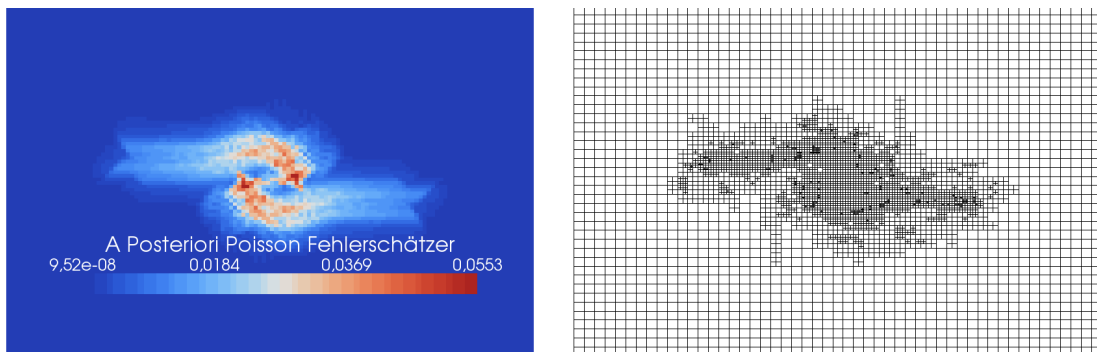
Am Ende der Zeit muss ein Integral möglichst akkurat bestimmt werden. Daraus ergibt sich, dass an dieser Stelle ebenfalls hohe Gewichte und damit hohe Indikatorwerte resultieren. Möglich ist, dass das Gebiet hier nicht so fein aufgelöst sein müsste, um die Position genau bestimmen zu können. Das gewählte Zielfunktional kann das jedoch nicht beurteilen.



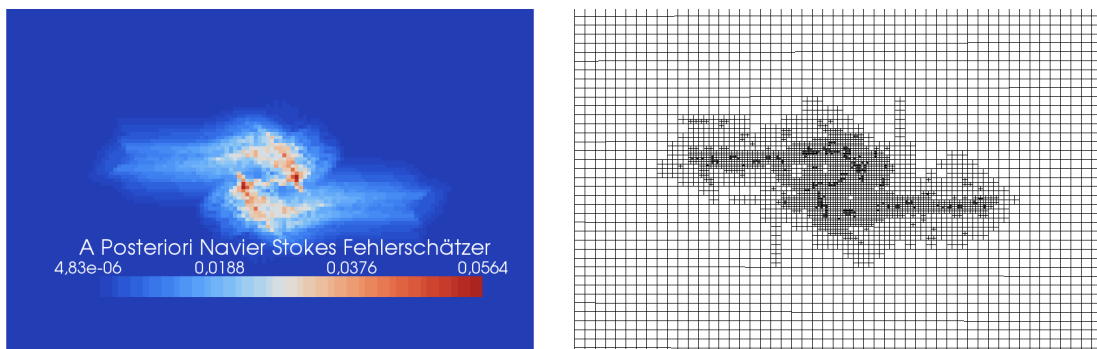
(a) Indikator: Vorticity-Indikator



(b) Indikator: Energie-Indikator

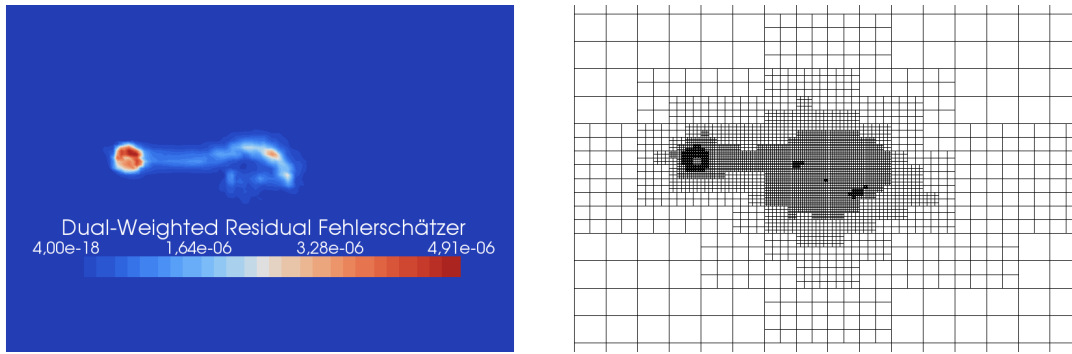


(c) Indikator: A posteriori Poisson Fehlerschätzer



(d) Indikator: A posteriori Navier-Stokes Fehlerschätzer

Abbildung 9.8: Indikatorwerte berechnet auf einem uniformen Gitter (16384 Zellen, links). Aus einem Startgitter (2601 Zellen) resultierendes Gitter ( $6000 \pm 2.5\%$  Zellen, rechts) nach 7 Adaptions-Zyklen, ausgeführt mit der Fixed Mesh-Fraction Strategy 8.2.2 auf Basis des jeweiligen Indikators.



(a) Indikator: Dual Weighted Residual Fehlerschätzer

Abbildung 9.9: Indikatorwerte berechnet auf einem uniformen Gitter (16384 Zellen, links). Aus einem Startgitter (12000 Zellen) resultierendes Gitter (5968 Zellen, rechts), Gitteradaption ausgeführt mit der Constant Number Strategy nach Baumann [25].

Anhand der physikalischen Indikatoren und der a posteriori Fehlerschätzer wurde ein Startgitter mit 2601 Zellen in 7 Adaptionen-Zyklen mit der Fixed Mesh-Fraction Strategy 8.2.2 verfeinert. Das jeweils resultierende Gitter hat  $6000 \pm 2.5\%$  Zellen. Zu beachten ist, dass bei der Simulation auf Basis des Dual Weighted Residual Fehlerschätzers eine andere Adaptionen-Strategie gewählt wurde, bei der auch Vergrößerungen zugelassen sind (Constant-Number Strategy nach Baumann [25]). Das resultierende Gitter hat ebenfalls  $6000 \pm 2.5\%$  Zellen, das Startgitter war jedoch wesentlich feiner aufgelöst.

Die anhand der jeweiligen Indikatoren adaptierten Gitter (Abbildungen 9.8a bis 9.9a) unterscheiden sich ebenfalls signifikant voneinander. Für die physikalischen Indikatoren ist hier noch einmal auf den Einfluss des Koeffizienten  $\beta$  hingewiesen, der, wie in 8.1.1 gezeigt, einen maßgeblichen Einfluss auf das nach der Adaption resultierende Gitter hat. Beim Energie-Indikator, dessen Gradient verhältnismäßig schwach war, wird mit der Wahl von  $\beta = 2$  ein Gitter erzeugt, bei dem die Zellen maximal zwei Verfeinerungslevels voneinander abweichen. Beim Vorticity-Indikator, dessen Gradient höher war, liegen bei der Verwendung von  $\beta = 16$  ebenfalls zwei Verfeinerungslevels zwischen der größten und der feinsten Auflösung, bei den a posteriori Fehlerschätzern vier. Bei letzteren war ein sprunghaftes Verhalten der Indikatorwerte zwischen benachbarten Zellen sichtbar. Im Gitter macht sich dieses Verhalten in Form von vereinzelt verfeinerten Zellen sichtbar.

### 9.3.2 Globaler Fehler

Ein weiteres Maß für die Qualität der Finiten-Elemente-Lösung, welches neben dem Fehler in der Sturmposition betrachtet werden soll, ist der Schätzwert  $\eta$  für den globalen Fehler  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ . Aus den lokalen Fehlerbeiträgen  $\eta_K$  eines Fehlerschätzers lässt sich dieser bestimmen durch

$$\eta^2 := \sum_{K \in T_h} \left( \sum_{t=0}^T \eta_{K,t} \right)^2.$$

Dass sich sowohl der residuale Schätzer für das Poisson-Problem, als auch der residuale Schätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen dazu eignen, lokale Fehlerbeiträge des hier betrachteten Szenarios abzuschätzen, wird im Vergleich der globalen Schätzwerte sichtbar:

In Abbildung 9.10 wird jeweils der globale Fehler des residualen Schätzers für das Poisson-Problem und die Navier-Stokes-Gleichungen auf dem selben Gitter betrachtet. Dessen Adaption erfolgte anhand der lokalen Fehlerbeiträge  $\eta_K$  berechnet mit *einem* der beiden Schätzer.

Beide Gitter führen zu einer vergleichbaren Abnahme des geschätzten globalen Fehlers. Auch der Blick auf die resultierenden, sich stark ähnelnden Gitter 9.8c und 9.8d bestätigt, dass beide Fehlerschätzer für die Abschätzung des globalen Fehlers des hier betrachteten Problems geeignet sind.

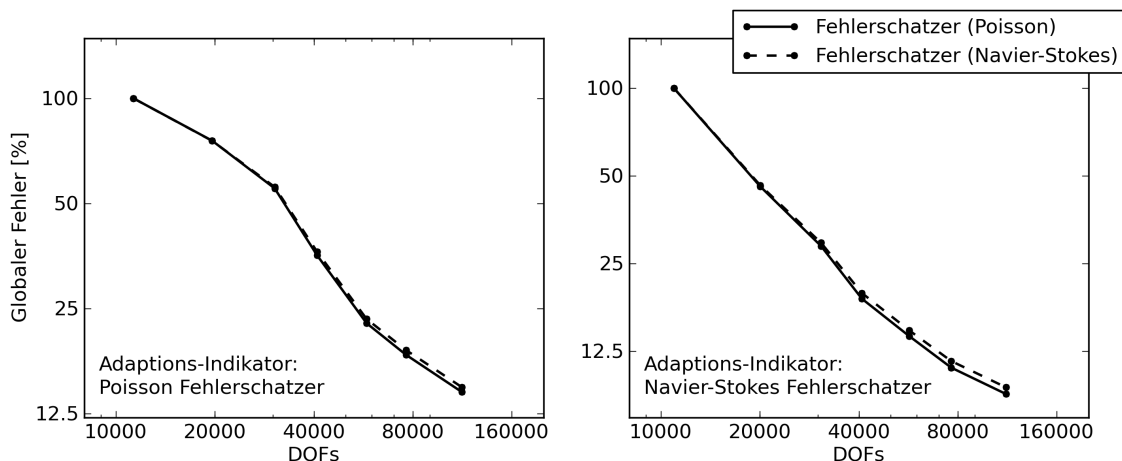


Abbildung 9.10: Vergleich der geschätzten a posteriori Fehler auf einem Gitter adaptiert anhand der Poisson-Indikatoren (links) und der Navier-Stokes-Indikatoren (rechts).

### 9.3.3 Fehler in der Sturmposition

Der Vergleich mit dem uniformen Referenz-Lauf zeigt, dass für Problemgrößen bis circa 80000 Freiheitsgraden mit allen Indikatoren Gitter erzielt werden, die effizienter sind als das uniforme Gitter. Der Fehler in der Sturmposition liegt hier bei den adaptierten Gittern zum Teil mehrere Größenordnungen unter dem Fehler, ermittelt aus dem Referenzlauf. Erst ab einer Problemgröße von circa 40000 Freiheitsgraden wird auf dem uniformen Gitter das tatsächliche physikalische Szenario gerechnet, nämlich das Auseinanderdriften der beiden Wirbel. Das anhand des Energie- und des Vorticity -Indikators adaptierte Gitter berechnet dieses bereits bei einer Problemgröße von 993 Zellen, der resultierende Positionsfehlers liegt dann bei rund 200 km (Energie) bzw. 400 km (Vorticity). Auf allen anderen adaptierten Gitter wird ab Problemgrößen von etwa 20000 Freiheitsgraden das richtige Szenario berechnet.

Insgesamt schneidet der zielorientierte Dual Weighted Residual Ansatz am besten ab, hier liegt der Fehler für Problemgrößen über 20000 Freiheitsgraden im Bereich weniger Kilometer, auch für größere Problemgrößen bleibt der Fehler in dieser Größenordnung. Wie in Abschnitt 9.2.1 beschrieben und in Abbildung 9.6, wäre die Effizienz des Gitters bei einem symmetrischen an Stelle eines asymmetrischen Zielfunktional entsprechend schlechter.

Im Vergleich der beiden a posteriori Fehlerschätzer werden mit dem Navier-Stokes Fehlerschätzer bessere Ergebnisse erzielt als mit dem Poisson Fehlerschätzer. Das gilt jedoch nur

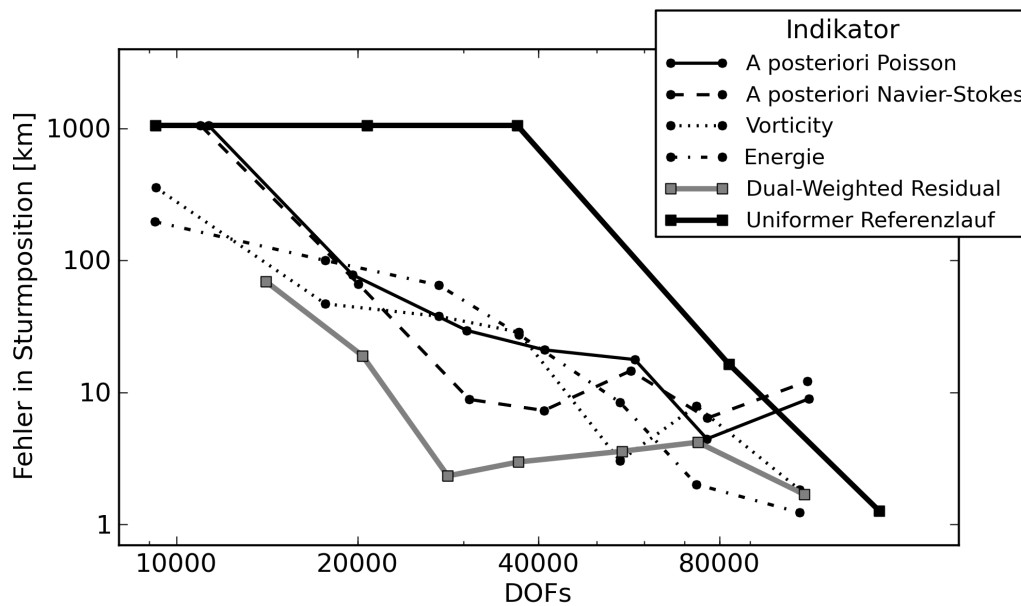


Abbildung 9.11: Fehler in der Sturmposition nach 96 h.

für Problemgrößen unter 40000 Freiheitsgraden, für größere Problemgrößen kann der resultierende Fehler in der Sturmposition sogar zunehmen. Anhand der Abbildung 9.12, auf dem Positions-Fehler in Abhängigkeit der Adaptions-Schritte einer Simulation darstellt, lässt sich beobachten, dass der Fehler sowohl mit zunehmender Anzahl an Adaptions-Zyklen, als auch mit einer Zunahme der Problemgröße um mehrere 10 km steigt. Einen wichtigen Einfluss spielt hier die Adaptions-Strategie. Wie bereits in 9.2.1 besprochen, kann durch eine festgelegte, endliche Anzahl von Adaptionszyklen nur ein angenähertes, optimales Gitter erzeugt werden. Dieses wurde in der in Abbildung gezeigte Simulation offensichtlich noch nicht erreicht. Würde man hingegen beim Abbruchkriterium sicherstellen, dass die Fehlerindikatoren auf dem gesamten Gitter gleich verteilt sind, wäre ein geringerer Positionsfehler zu erwarten gewesen.

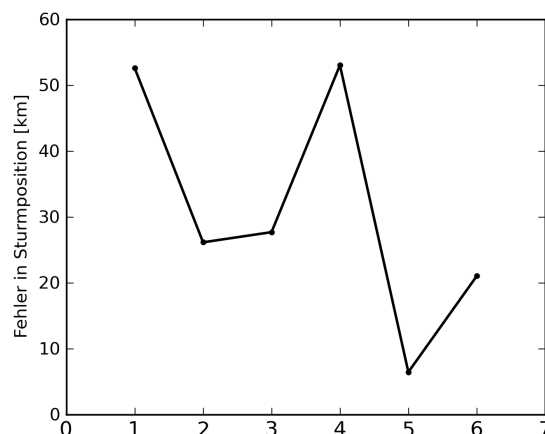


Abbildung 9.12: Ansteigender Fehler in der Sturmposition mit zunehmender Anzahl an Adaptions-Zyklen für die Simulation auf einem anhand des a posteriori Poisson Fehlerschätzers adaptierten Gitter (4000 Zellen).



Bei den physikalischen Kriterien schneiden sowohl der Energie- als auch der Vorticity-Indikator sehr gut ab. Dass die Wahl des Parameters  $\beta$  einen maßgeblichen Einfluss auf die Größe des Positionsfehlers hat, wurde in der Parameter-Studie in Abbildung 9.5 sichtbar. Denkbar ist, dass sich die hier erzielten Resultate durch eine geeignetere Wahl von  $\beta$  sogar noch weiter verbessern lassen. Genauso ist aber auch denkbar, dass sich durch eine ungeeignete Wahl von  $\beta$  beliebig schlechte Resultate erzielen lassen, wie in Abbildung 9.13 zu sehen sein wird.

Im Vergleich mit dem uniformen Referenzlauf lassen sich für das hier betrachtete Szenario der Interaktion zweier Wirbelstürme mit allen Indikatoren effiziente Gitter erzeugen, die im Hinblick auf die Sturmposition des rechten Sturms nach 96  $h$  sehr gute Ergebnisse liefern.

## 9.4 Fazit

Die Interaktion zweier Wirbelstürme dient in diesem Kapitel als Benchmark-Problem für adaptive Methoden. Verschwindend kleine Änderungen der Ausgangssituation, beispielsweise in der Anfangsdistanz der beiden Wirbel, deren Intensität oder der Gitterauflösung, können einen immensen Effekt auf die Lösung haben. Bereits ein minimaler Fehler in der Lösung kann dazu führen, dass sich die beiden Wirbel vereinen, anstatt auseinander zu driften. Das Gebiet, in dem die beiden Wirbel miteinander interagieren, muss deshalb besonders gut aufgelöst sein. Sobald die Wirbel den Bereich der gegenseitigen Beeinflussung verlassen haben und sich voneinander weg bewegen oder sich zu einem Wirbel vereint haben, darf die Gitterauflösung gröber werden. Alle untersuchten Indikatoren führen dazu, dass das Gebiet der Interaktion besonders fein aufgelöst ist.

Beim zielorientierten Ansatz wird abgeschätzt, wie groß die Fehlerbeiträge der einzelnen Zellen für den Fehler im Zielfunktional sind. Diese sind im Gebiet der Interaktion besonders groß, da kleine Fehler in diesem Bereich zu völlig anderen Zugbahnen und damit zu großen Fehlern in der Endposition führen können. Da der zielorientierte Fehlerschätzer durch die Lösung des dualen Problems Kenntnis über die Sensitivität des Fehlers des Zielfunctionals von lokalen Fehlerquellen hat, detektiert er also automatisch das richtige Gebiet. Anders als die physikalischen Kriterien und die residualen Fehlerschätzer wird hier neben dem Gebiet der Interaktion auch das Gebiet um die Endposition verfeinert.

Energie- und Vorticity-Indikator verfeinern das Gebiet der Interaktion ebenfalls, allerdings ohne den eigentlichen Grund zu kennen. Im Laufe der Simulation verliert der Wirbel an Intensität, die Indikatorwerte werden im Laufe der Zugbahn dementsprechend abnehmen. Das hat zur Folge, dass die Gitterauflösung zu Beginn der Zugbahn besonders fein wird, mit zunehmender Zugbahn nimmt die Gitterauflösung ab. Im hier betrachteten Szenario entspricht der Bereich um die Startposition genau dem Bereich, in dem die Interaktion stattfindet, das Gebiet um die Endposition wird jedoch nicht verfeinert. Für diese Anwendung führt die Gitter-Adaption anhand der physikalischen Indikatoren zu sehr guten Ergebnissen. Diese sind allerdings mit Vorsicht zu betrachten: Denkbar wäre zum Beispiel ein Szenario, bei dem die beiden Wirbel bereits mehrere hundert Kilometer zurück gelegt haben, bevor sie miteinander interagieren. Wird das Gitter nun wieder über die Energie oder die Vorticity verfeinert, wird das Gebiet um die Startposition feiner aufgelöst sein als der Bereich der Interaktion. Nur in dem hier betrachteten Szenario ist das Gebiet der stärksten Vorticity- und Energie-Indikatorwerte gleichzeitig auch das Gebiet, in dem die größten Fehlerbeiträge für den Fehler im Zielfunktional entstehen.

Dass die physikalischen Ergebnisse hier zu sehr guten Ergebnissen kommen, ist der Wahl von  $\beta$  zu verdanken. Die Indikatoren selbst kennen ausschließlich die diskrete Lösung des

momentanen Zeitpunktes. Anhand dieser Information lässt sich aber weder abschätzen, wie gut die diskrete Lösung das physikalische Problem tatsächlich erfüllt, noch wie sich ein daraus resultierender Fehler langfristig entwickeln wird. Durch die Wahl von  $\beta$  lässt sich die Gitter-Adaption allerdings so steuern, dass Fehler, die einen langfristigen Effekt auf die Simulation hätten, rechtzeitig verhindert werden.

Im Gegensatz zu physikalischen Kriterien verfügen die beiden a posteriori Fehlerschätzer in Form des Residuums auch Information darüber, wie gut das physikalische Problem erfüllt wird. Dieser Fehler kann nur zum momentanen Zeitpunkt bestimmt werden, der Indikator hat folglich ebenfalls wieder keine Kenntniss darüber, wie sich der Fehler im Laufe der Simulation weiter entwickeln wird. Stattdessen werden alle Zellen verfeinert, auf denen im Laufe der Zeit lokal große Fehlerbeiträge entstehen. Gegenüber den physikalischen Kriterien haben a posteriori Kriterien den bedeutenden Nachteil, dass die Gitter-Adaption nicht durch einen zusätzlichen Parameter steuerbar ist. In dem hier betrachteten Beispiel hatte dies langfristige Folgen, die zu einer deutlichen Verschlechterung der Lösung geführt haben.

Abbildung 9.13 zeigt erneut den Fehler in der Sturmposition nach 96 h. Als Indikatoren dienen der Vorticity-Indikator mit einer ungeeigneten Wahl von  $\beta = 2$ , der Vorticity-Indikator mit der optimalen Wahl von  $\beta = 16$  und der a posteriori Fehlerschätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen. Bei einer ungeeigneten Wahl von  $\beta$  werden langfristige Fehlerbeiträge nicht mehr ausreichend gedämpft. Der Fehler in der Endposition für den Vorticity-Indikator ist dann sogar größer als beim a posteriori Fehlerschätzer für die Navier-Stokes-Gleichungen.

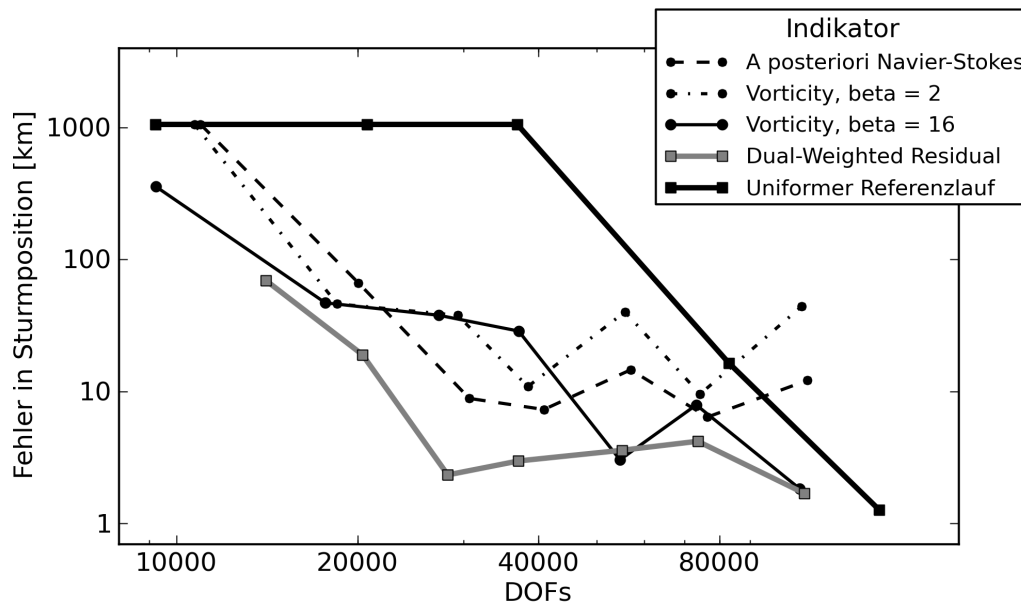


Abbildung 9.13: Fehler in der Sturmposition nach 96 h. Die Wahl von  $\beta = 2$  für den Vorticity-Indikator erweist sich als ungeeignet.

## 10. Zusammenfassung und Perspektiven

Das Ziel der Arbeit war die Untersuchung, inwiefern sich adaptive Methoden zur akkuraten und frühzeitigen Vorhersage der Zugbahn tropischer Wirbelstürme eignen. Der Einsatz adaptiver Methoden strebte eine Maximierung der Effizienz des diskreten Rechengitters an, wobei die Effizienz definiert war durch die Qualität der Lösung und den damit verbundenen Kosten. Zur Abschätzung der Qualität wurde in Kapitel 7 zunächst anhand eines Minimalbeispiels geklärt, ob adaptierte Gitter einen Einfluss auf die korrekte Darstellung der Physik des betrachteten Problems haben. Ein idealisierter Wirbel bewegte sich auf einem Gebiet, dessen räumliche Auflösung in einen Bereich feiner und einen Bereich grober Auflösung unterteilt war. Für unterschiedliche Einfallswinkel des Wirbels auf die Auflösungsgränze wurde analysiert, ob eine Änderung der Intensität oder der Zugbahn stattfand. Die Simulationen erfolgten mit einem stetigen und einem unstetigen Galerkin-Verfahren, beide Verfahren führten zu sehr ähnlichen Ergebnissen. Der Übergang zwischen den unterschiedlich aufgelösten Gittern verursachte keinen zusätzlichen Energieverlust, der Verlust in den einzelnen Gebieten entsprach dem auf einem uniformen Gitter der jeweiligen Gitterauflösung. Geringe Auswirkungen waren auf die Zugbahn eines Wirbels festzustellen, in allen betrachteten Fällen war die resultierende Auslenkung klein im Vergleich mit der Gitterweite.

Im Fokus des zweiten Teils der Arbeit, Kapitel 8 und 9, standen die Fragen, durch welche Kriterien die Gitter-Adaption gesteuert werden soll, welche Kosten damit verbunden sind und welcher Vorteil durch die Adaption entsteht. Zur Steuerung der Gitter-Adaption dienten Indikatoren, die sich aus physikalischen oder mathematischen Eigenschaften des betrachteten Problems ableiten ließen. Indikatoren auf Basis der Vorticity und der kinetischen Energie des Problems wurden repräsentativ für den Typ des physikalischen Kriteriums gewählt, als mathematisch motivierte Kriterien kamen residuale a posteriori Fehlerschätzer für das Poisson-Problem und die Navier-Stokes-Gleichungen zum Einsatz. Eine Verbindung zwischen physikalischer und mathematischer Motivation stellte ein Indikator gemäß des Dual Weighted Residual Ansatzes nach Becker und Rannacher [23] dar, bei dem die Gitter-Adaption auf eine Optimierung im Hinblick auf die Endposition des Wirbels abzielte. Als Benchmark-Problem für den Einsatz der unterschiedlichen Adaption-Kriterien diente die gegenseitige Beeinflussung zweier tropischer Wirbelstürme, deren Interaktion unter anderem abhängig von der räumlichen Gitterauflösung war. In Abschnitt 8.3 wurden die Indikatoren im Hinblick auf die erforderlichen Kosten verglichen. Sowohl den höchsten

Rechenaufwand, als auch den größten Speicherbedarf hat der zielorientierte Fehlerschätzer, physikalisch motivierte Ansätze und Ansätze auf Basis von a posteriori Fehlerschätzern erfordern beide einen verhältnismäßig geringen zusätzlichen Rechenaufwand. Ein Nachteil physikalischer Kriterien war, dass vorab ein optimaler Koeffizient  $\beta$  zur Charakterisierung des optimalen Gitters zu ermitteln war. Dieser musste experimentell bestimmt werden, woraus sich ein zusätzlicher, zu berücksichtigender Rechenaufwand ergab. Ein Vorteil des zielorientierten Fehlerschätzers lag darin, sich auf die Zugbahn einer der beiden Stürme zu konzentrieren, was zu einer zusätzlichen Steigerung der Effizienz des Gitters führte. Die Qualität der Lösung war für das hier betrachtete Szenario für alle untersuchten Adaptions-Indikatoren gut, was in Abschnitt 9.3.3 gezeigt wurde. Die genauesten Ergebnisse wurden mit dem zielorientierten Ansatz erreicht, je nach Problemgröße konnten insbesondere auch physikalisch motivierte Ansätze sehr gute Indikatoren liefern, um den Fehler in der Endposition der Stürme zu minimieren. Die Effizienz der adaptierten Gitter war für Problemgrößen unter 10000 Zellen für alle Kriterien größer als die eines uniformen Gitters. Bei größeren Problemgrößen lag die Effizienz bei den residualen Fehlerschätzern darunter.

Im praktischen Einsatz adaptiver Verfahren für die Vorhersage der Zugbahn von Wirbelstürmen wird das zielorientierte Verfahren zuverlässig zu einer Steigerung der Effizienz führen können. Von Vorteil ist hierbei, dass das Gitter durch die Flexibilität in der Wahl des Zielfunktionals problemspezifisch optimiert werden kann. Ein entscheidender Nachteil dieses Ansatzes besteht in dem enormen zusätzlich erforderlichen Rechenaufwand. Bei der Vorhersage der Zugbahn eines Sturmes ist die Rechenzeit aber ein fundamentaler Aspekt – eine Frühwarnung verfehlt ihren Zweck, wenn sie zu spät kommt. Auf Basis von Beobachtungs- und Fernerkundungsdaten soll also in möglichst kurzer Zeit eine möglichst genaue Vorhersage gemacht werden. Durch die Entwicklung immer schnellerer Supercomputer und effizienterer Algorithmen ist denkbar, dass dieser Nachteil zukünftig jedoch verschwindend klein sein könnte.

Im Bezug auf die erforderliche Rechenleistung innerhalb eines Adaptions-Zyklus sind physikalische Kriterien und a posteriori Fehlerschätzer im Vorteil. Dass die hier betrachteten a posteriori Fehlerschätzer und die physikalischen Kriterien – unter geeigneter Wahl von  $\beta$  – für das hier simulierte Problem zu vergleichbar guten Resultaten führen wie der zielorientierte Ansatz, wurde gezeigt. Diese Ergebnisse sind zunächst allerdings unter Vorbehalt und nur für das hier betrachtete Problem gültig. Zu prüfen ist, ob diese in realistischeren Simulationen, beispielsweise unter Vorhandensein einer Front oder weiterer Wirbel oder im dreidimensionalen Fall, ebenfalls zuverlässig zu effizienteren Gittern führen. Hierzu können möglicherweise noch entsprechende Erweiterungen des Ansatzes notwendig werden.

Für physikalische Kriterien kam in dieser Arbeit ein zusätzlicher Aufwand durch die Wahl eines geeigneten Koeffizienten  $\beta$  hinzu. Dieser Zusatzaufwand würde jedoch entfallen, sollte sich herausstellen, dass die Koeffizienten generisch sind. Denkbar ist, dass sich ein Zusammenhang zwischen dem optimalen Parameter  $\beta$  und der Problemgröße bzw. der Anwendung finden lässt. Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, könnte die Parameter-Studie in 9.2.1 weiter ausgedehnt werden. Ähnlich wie beim Dual Weighted Residual Ansatz ließe sich dann auch ein zielorientierter Adaptions-Algorithmus ableiten, der das Gitter auf Basis physikalischer Kriterien selbstständig so adaptiert, dass eine an das Gitter gestellte Anforderung optimal erfüllt wird. Gegenüber dem Dual Weighted Residual Ansatz entfielen hier das aufwendige Lösen des dualen Problems. Mit Hilfe eines solchen neuartigen, zielorientierten Adaptions-Algorithmus könnte dann eine weitere Steigerung der Effizienz erzielt werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] S. Fujiwhara, “On the growth and decay of vortical systems,” *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 49, pp. 75–104, 1923.
- [2] M. Lander, “On the interaction of tropical-cyclone-scale vortices. i: Observations.” *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 119, pp. 1347–1361, 1993.
- [3] E. A. Ritchie and G. J. Holland, “On the interaction of tropical-cyclone scale vortices. ii: Interacting vortex patches.” *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 119, pp. 1363–1379, 1993.
- [4] S. Brand, “Interaction of binary tropical cyclones of the western north pacific ocean,” *Journal of Applied Meteorology*, vol. 9, pp. 433–441, 1970.
- [5] K. Emanuel, C. Desautels, C. Holloway, and R. Korty, “Environmental control of tropical cyclone intensity.” *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 61, pp. 843–858, 2004.
- [6] P. D. D. Braess, *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [7] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] I. Babuska and B. Szabo, “The p-version of the finite element method,” *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 18, no. 3, pp. 515–545, 1981.
- [9] V. Heuveline, “Hiflow3 - a flexible and hardware-aware parallel finite element package,” in *Proceedings of the 9th Workshop on Parallel/High-Performance Object-Oriented Scientific Computing of POOSC '10*. ACM, New York, NY, USA, 2010, pp. 4:1–4:6.
- [10] F. Schieweck, “A-stable discontinuous galerkin-petrov time discretization of higher order,” *Journal of Numerical Mathematics*, vol. 18, pp. 25–57, 2010.
- [11] F. X. Giraldo and M. Restelli, “High-order semi-implicit time-integrators for a triangular discontinuous galerkin oceanic shallow water model,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, no. July 2009, pp. 1077–1102, 2010.
- [12] S. K. Godunov, “A numerical study of tropical cyclone motion using a barotropic model. i: The role of vortex asymmetries,” *Mathematicsheskii Sbornik*, vol. 47, pp. 271–306, 1959.
- [13] V. V. Rusanov, “Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles,” *Journal of Computational Math Physics USSR*, vol. 1, pp. 261–279, 1961.

- [14] P. L. Roe, "Approximate riemann solvers, parameter and difference schemes," *Journal of Computational Physics*, vol. 372, pp. 357–372, 1981.
- [15] E. F. Toro, "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction," Dordrecht, 2009.
- [16] L. Scheck, S. C. Jones, and M. Juckes, "The resonant interaction of a tropical cyclone and a tropopause front in a barotropic model, part i: Zonally-oriented front." *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 68, pp. 405–419, 2011.
- [17] R. Smith, W. Ulrich, and G. Dietachmayer, "A numerical study of tropical cyclone motion using a barotropic model. i: The role of vortex asymmetries," *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 116, no. 492, pp. 337–362, 1990.
- [18] S. Jones, "The evolution of vortices in vertical shear. i: Initially barotropic vortices," *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 121, pp. 821–851, 1995.
- [19] J. Behrens, *Adaptive Atmospheric Modeling*. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [20] D. Etling, *Theoretische Meteorologie: Eine Einführung*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [21] C. Jablonowski, "Adaptive grids in weather and climate modeling," Ph.D. dissertation, The University of Michigan, 2004. [Online]. Available: [http://www-personal.umich.edu/~cjablono/phd\\_thesis\\_jablonowski\\_2004.ps.gz](http://www-personal.umich.edu/~cjablono/phd_thesis_jablonowski_2004.ps.gz)
- [22] R. Verfürth, "A posteriori error estimators for the stokes equations," *Numerische Mathematik*, vol. 55, pp. 309–325, 1989.
- [23] R. Becker and R. Rannacher, "An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods," *Acta Numerica*, vol. 10, pp. 1–102, Jan. 2003. [Online]. Available: [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0962492901000010](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0962492901000010)
- [24] Y. Wang and Y. Zhu, "Analysis and numerical study of the interactions of binary tropical cyclones, part ii: Numerical simulations," *Scientia Atmospherica Sinica*, vol. 16, pp. 659–668, 1992.
- [25] M. Baumann, "Numerical simulation of tropical cyclones using goal-oriented adaptivity," Ph.D. dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2012.
- [26] S. Valcke and J. Verron, "Interactions of baroclinic isolated vortices: The dominant effect of shielding." *Journal of Physical Oceanography*, vol. 27, pp. 524–541, 1997.
- [27] A. Richter, "Untersuchungen zur wechselwirkung tropischer wirbelstürme in einem idealisierten dreidimensionalen numerischen modell," Master's thesis, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2012.
- [28] S.-E. Shin, J.-Y. Han, and J.-J. Baik, "On the critical separation distance of binary vortices in a nondivergent barotropic atmosphere," *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, vol. 84, no. 5, pp. 853–869, 2006.
- [29] M. Schmich, "Adaptive finite element methods for computing nonstationary incompressible flows," Ph.D. dissertation, University of Heidelberg, 2009.

# Danksagung

Mein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Sarah Jones und Dr. Leonhard Scheck, die diese interdisziplinäre Arbeit möglich gemacht haben. Ich danke ihnen für die hilfreichen Anregungen, die konstruktive Kritik und die hervorragende Beratung bezüglich meteorologischer Inhalte der Arbeit.

Großer Dank gilt auch Prof. Dr. Vincent Heuveline, der mir nicht nur einen Arbeitsplatz zur Verfügung gestellt hat, sondern durch seine mir entgegengebrachte Förderung maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Herrn Prof. Dr. Beheng danke ich dafür, dass er meine Neugierde an der Wissenschaft, besonders der Meteorologie, während des Hauptstudiums herausgefordert, gewürdigt und unterstützt hat.

Ein herzlicher Dank geht außerdem an Prof. Dr. Jörn Behrens und Nicole Beisiegel, die mir aufopferungsbereit das Gebiet der unsteady Galerkin-Verfahren näher gebracht haben und mir ihre Software zur Verfügung gestellt haben.

Danken möchte ich auch dem Team der Arbeitsgruppe Numerische Simulation, Optimierung und Hochleistungsrechnen für viele hilfreiche Diskussionen und die wunderbare Arbeitsatmosphäre.

Mein größter Dank gilt Dr. Martin Baumann, ohne dessen uneingeschränktes Engagement diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre. Vielen Dank für ein Jahr voller Unterstützung, Beratung, Geduld und für die vermittelte Freude am wissenschaftlichen Arbeiten.