

Parametrisierung wolkenmikrophysikalischer Prozesse und Simulation konvektiver Mischwolken

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Met. Axel Seifert

aus Mutlangen

Tag der mündlichen Prüfung:	12. Juli 2002
Referent:	Prof. Dr. K. D. Beheng
Korreferent:	Prof. Dr. Ch. Kottmeier

Zusammenfassung

Die Dissertation widmet sich der Beschreibung wolkenmikrophysikalischer Prozesse in konvektiven Mischwolken mit dem Ziel, die numerische Simulation und Vorhersage hochreichender Konvektion zu verbessern.

Ausgehend von der spektralen Formulierung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse werden Methoden entwickelt, um vereinfachte Beschreibungen - so genannte Parametrisierungen - herzuleiten. Im Mittelpunkt steht dabei die Parametrisierung der diversen Stoßprozesse der Wolken- und Niederschlagspartikel. Durch die konsequente Verwendung von zwei Momenten der Anzahldichteverteilungsfunktion zur Beschreibung der fünf verschiedenen Partikelarten Wolkentropfen, Regentropfen, Wolkeneis, Schnee und Graupel kann dabei ein deutlicher Fortschritt gegenüber den derzeit üblichen Verfahren erzielt werden.

Die im Rahmen der Arbeit entwickelten Parametrisierungen wurden in das mesoskalige Atmosphärenmodell KAMM2 implementiert. Dies ermöglicht es, die raum-zeitliche Entwicklung von Mischwolken unter Berücksichtigung aller relevanten wolkenmikrophysikalischen Prozesse zu simulieren. Auf Grund der Verwendung von zwei Momenten je Partikelklasse und der dadurch notwendigen Behandlung der Nukleation von Wolkentropfen und Wolkeneis kann die Entwicklung von Mischwolken unter maritimen bzw. kontinentalen atmosphärischen Bedingungen untersucht werden. Dabei wird gezeigt, dass die Wolkenentwicklung unter kontinentalen Bedingungen langsamer und weniger intensiv verläuft.

Außerdem wird die Dynamik thermischer Konvektion in verschiedenen atmosphärischen Regimen simuliert. So treten bei niedriger konvektiv verfügbarer Energie und niedrigen Windgeschwindigkeiten gewöhnliche Einzelzellen auf, die eine Lebensdauer von ein bis zwei Stunden besitzen. Steht mehr potentielle Energie zur Verfügung, so können, ausgelöst durch die mit dem Niederschlag einhergehenden Böenfronten, neue konvektive Zellen entstehen und es bildet sich ein Multizellensystem. Bei hohen Windgeschwindigkeiten führt die Wirbeldynamik der Strömung dazu, dass sich sehr langlebige, quasi-stationäre und intensive konvektive Zellen ausbilden, die als Superzellen bezeichnet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen und Kenntnisstand	7
2.1	Hydrodynamik	7
2.1.1	Die hydrodynamischen Grundgleichungen	7
2.1.2	Einführung eines Grundzustandes	11
2.1.3	Reynoldsmittelung und Turbulenzparametrisierung	12
2.2	Die physikalischen Eigenschaften der Hydrometeore	16
2.2.1	Geometrie	16
2.2.2	Fallgeschwindigkeit	17
2.2.3	Koagulationseigenschaften von Tropfen	19
2.2.4	Koagulationseigenschaften von Eispartikeln	25
2.3	Theoretische Formulierung der wolkenmikrophysikalischen Vorgänge	29
2.3.1	Spektrale Formulierung der Koagulation	29
2.3.2	Spektrale Formulierung von Koagulation und Breakup	31
2.3.3	Spektrale Formulierung der Kollisionsprozesse in Mischwolken	33
2.4	Klassifikation und Simulation konvektiver Systeme	35
3	Integrale Formulierung der Wolkenmikrophysik. Teil I: Flüssige Phase	41
3.1	Grundlagen	41
3.1.1	Definition der Momente der Anzahldichteverteilung	41
3.1.2	Bilanzgleichung für die Momente der Verteilungsfunktion	42
3.1.3	Spezifikation der Phasen- und Diffusionsflüsse	43
3.2	Parametrisierte Wolkenmikrophysik: Grundlegende Begriffe	43
3.2.1	Die Kesslersche Parametrisierung der Autokonversionsrate	45
3.2.2	Empirische Verteilungsfunktionen	47

3.3	Parametrisierung der Koagulation von Tropfen	47
3.3.1	Approximation der Koagulationsfunktion	48
3.3.2	Integrale Formulierung der kinetischen Gleichung	51
3.3.3	Eine erste Näherung für die Autokonversionsrate	56
3.3.4	Näherungen für Akkreszenz und Selbsteinfang	58
3.3.5	Invarianztransformation und Ähnlichkeitsgesetze	59
3.3.6	Bestimmung der universellen Funktionen durch numerische Simulation	64
3.4	Parametrisierung des Zerplatzens von Regentropfen	66
3.5	Parametrisierung der Sedimentation	69
3.5.1	Die Sedimentation der Regentropfen	70
3.5.2	Die Sedimentation der Wolkentropfen	75
3.6	Vergleich der spektralen und der integralen Formulierung der Koagulations- prozesse	76
3.6.1	Box-Modell	76
3.6.2	Eindimensionales Modell	81
3.7	Parametrisierung von Nukleation, Kondensation und Verdunstung	91
3.7.1	Nukleation	91
3.7.2	Kondensation	94
3.7.3	Die Verdunstung der Regentropfen	96

4 Integrale Formulierung der Wolkenmikrophysik. Teil II: Eisphase 99

4.1	Grundlagen und Begriffe	99
4.2	Kollisionswechselwirkungen in Mischwolken	101
4.2.1	Formulierung der integralen Wachstumsgleichungen	101
4.2.2	Das kontinuierliche Modell	105
4.2.3	Die Wisner-Approximation	108
4.2.4	Eine verbesserte Wisner-Approximation	110
4.2.5	Ansatz von Murakami und Mizuno	113
4.2.6	Vergleich der Näherungen mit numerischer Integration	114
4.2.7	Die Varianz der Geschwindigkeitsverteilung	115
4.2.8	Der Selbsteinfang von Schnee	118
4.2.9	Die Aggregation von Wolkeneis	119
4.2.10	Wechselwirkung Eispartikel-Regentropfen: Gefrorene Tropfen	119
4.2.11	Die mittlere Kollisionseffizienz	120

4.2.12	Aggregationseffizienz zwischen Eispartikeln	121
4.3	Die Sedimentation der Eispartikel	122
4.4	Weitere Prozesse in Mischwolken: Ein kurzer Überblick	122
4.4.1	Nukleation von Eispartikeln	122
4.4.2	Depositionswachstum von Eispartikeln	126
4.4.3	Bereifen der Eispartikel und Umwandlung in Graupel	127
4.4.4	Schmelzen von Eispartikeln	128
5	Simulation hochreichender Konvektion	133
5.1	Wolkenmikrophysik und Numerik	133
5.1.1	Das Gleichungssystem der Wolkenmikrophysik	133
5.1.2	Zeitintegration und Operatorsplitting	137
5.1.3	Aktivierungsspektren und Nukleation	138
5.2	Grundzustand und Anfangsbedingung	139
5.3	Simulation der Entwicklung thermischer Konvektion	143
5.3.1	Simulation gewöhnlicher Einzelzellen	144
5.3.2	Simulation von Superzellen	161
5.3.3	Simulation von Multizellensystemen	179
5.3.4	Der Einfluss der Windscherung und der CAPE	182
5.4	Simulation orographisch induzierter Konvektion	188
5.4.1	Vorbemerkungen	188
5.4.2	Simulation einer Bergüberströmung	188
6	Schlussbetrachtungen	193
6.1	Zusammenfassung	193
6.2	Diskussion und Ausblick	195
A	Verteilungsfunktionen	197
A.1	Die verallgemeinerte Gamma-Verteilung	197
A.2	Die Gamma-Verteilung	198
A.3	Die Exponential-Verteilung	199
B	Berechnung der Radarreflektivität	201
	Literaturverzeichnis	205
	Symbolverzeichnis	221

Kapitel 1

Einleitung

Die Frage der Entstehung von Wolken und Niederschlag hat die Menschen schon immer fasziniert und für viele reduziert sich die Wettervorhersage auf die Fragestellung ob, wann und wo es am nächsten Tag Wolken oder Regen geben wird. Hinzu kommt, dass gerade unsere hochkomplexe industrialisierte Gesellschaft sehr empfindlich auf extreme Wetterereignisse reagiert. Eine Untersuchung des Einflusses des Wetters auf die Volkswirtschaft der westlichen Industriestaaten hat gezeigt, dass immerhin fünf Prozent des Bruttoinlandprodukts direkt vom Wetter beeinflusst werden. Allein für Westeuropa entspricht dies rund 300 Milliarden Dollar (Maier, 2001).

Es ist deshalb umso verwunderlicher, dass die Prozesse, die zur Bildung von Wolken und Niederschlag führen, keineswegs im Detail bekannt sind. Unterscheidet man zwischen stratiformen Wolken, die vor allem durch die großräumige synoptische Wettersituation bestimmt werden, und der kleinräumigen Cumuluskonvektion, so ist es insbesondere letztere, deren physikalische Mechanismen und Zusammenhänge immer noch Rätsel aufgeben. Dies liegt daran, dass gerade bei diesen kleinräumigen Phänomenen die zeitliche und räumliche Entwicklung durch ein komplexes Zusammenspiel verschiedener, an sich bereits sehr komplizierter physikalischer Prozesse bestimmt wird.

Auf Grund ihrer charakteristischen horizontalen Ausdehnung von 1-50 km ist die Cumulus- und Cumulonimbuskonvektion der so genannten Mesoskala zuzuordnen, was aussagt, dass diese Phänomene zwischen der synoptischen Skala des großräumigen Wetters und der kleinräumigen atmosphärischen Turbulenz liegen (siehe Abbildung 1.1). Konvektion kann in der Atmosphäre immer dann auftreten, wenn eine instabile vertikale Schichtung vorliegt, d.h. wenn ein aufsteigendes Luftpaket (sog. konvektives Element) sich während des Aufstiegs weniger stark abkühlt als es dem vertikalen Temperaturgradienten der umgebenden Luft

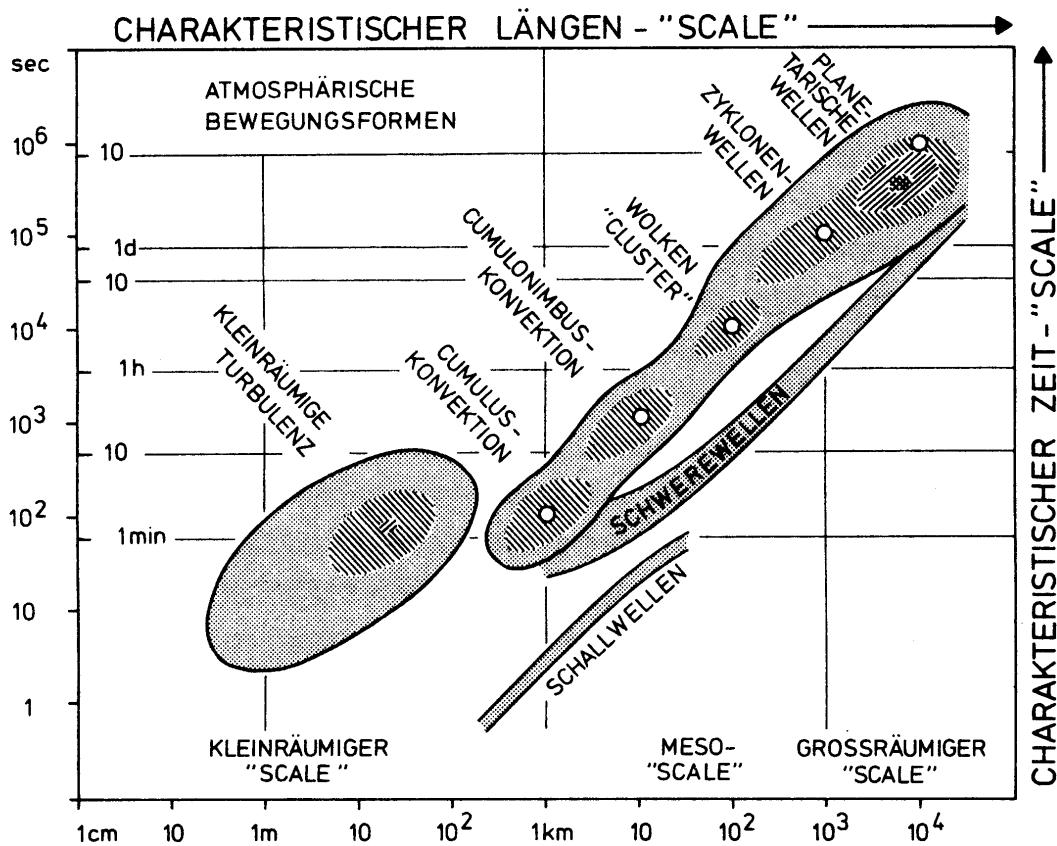


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der charakteristischen Längen- und Zeitskalen atmosphärischer Prozesse (nach Fortak, 1982, mit Änderungen).

entspricht. Je nachdem, ob dabei Kondensation, also die Phasenumwandlung des Wassers von Wasserdampf zu Flüssigwasser, stattfindet, spricht man von Trocken- oder Feuchtkonvektion. Im Fall der Feuchtkonvektion wird durch die Phasenumwandlung dem Luftpaket zusätzliche Wärme zugeführt, was die Konvektion noch weiter verstärkt. Ein weiteres Unterscheidungskriterium konvektiver atmosphärischer Prozesse ist die vertikale Längenskala: Bleibt die Konvektion auf eine Vertikalerstreckung von 1-3 km beschränkt, so spricht man von flacher Konvektion, im Gegensatz dazu kann sich die hochreichende Konvektion bis zur Tropopause und zum Teil bis in die untersten Schichten der Stratosphäre erstrecken. In der Atmosphäre ist hochreichende Konvektion stets Feuchtkonvektion; flache Feuchtkonvektion tritt insbesondere dann auf, wenn eine stark stabile Schicht, wie z.B. eine Inversion, die weitere Vertikalbewegung zum Erliegen bringt.

Bei Feuchtkonvektion wird die dynamische Entwicklung wesentlich durch die Phasenum-

wandlungen des Wassers und die damit verbundenen Umwandlungswärmen bestimmt. Die Energetik der Feuchtkonvektion speist sich demnach nicht nur aus der potentiell instabilen Temperaturschichtung oder der kinetischen Energie der atmosphärischen Strömung, sondern in hohem Maße aus den latenten Wärmen, die bei den Phasenumwandlungen von Wasserdampf zu Flüssigwasser bzw. Eis freigesetzt werden. Die Behandlung dieser Vorgänge und der dabei entstehenden Kondensatprodukte des Wasserdampfes ist allerdings äußerst schwierig, spielen dabei doch eine Vielzahl von physikalischen Prozessen wie z.B. Nukleation, Kondensation, Sublimation und Gefrieren eine Rolle. Hinzu kommt, dass die entstehenden Partikel, die allgemein als Hydrometeore bezeichnet werden, wiederum eine kaum überschaubare Zahl von Wechselwirkungen eingehen können. Insbesondere führen die wolkenmikrophysikalischen Prozesse dazu, dass sich nicht nur unterschiedlich große Partikel bilden, sondern diese, wie z.B. Schneeflocken, auch die verschiedensten geometrischen Formen annehmen können. Viele dieser Vorgänge wie z.B. die Nukleation und das Kollisionswachstum der Partikel, die sich auf Längenskalen von wenigen Mikrometern bis Zentimetern abspielen und außerdem starke Temperaturabhängigkeiten aufweisen, sind auch heute noch nur sehr rudimentär bekannt und quantifiziert.

Ein weiteres grundlegendes Problem bei der Klärung der offenen Fragen, die die Feuchtkonvektion aufwirft, ist die Tatsache, dass es äußerst schwierig ist, verlässliche Messdaten zu gewinnen. Zum einen sind Feldmessungen auf der Mesoskala an sich bereits schwierig durchzuführen, da oft ein Gebiet von mehreren hundert Quadratkilometern abgedeckt werden muss. Dies erfordert, wenn es überhaupt durchführbar ist, einen immensen technischen, personellen und finanziellen Aufwand. Zum anderen ist die in-situ Messung wolkenmikrophysikalischer Parameter in voll ausgebildeten Cumulonimben, z.B. mit Flugzeugen, nicht nur schwierig, sondern unter Umständen auch gefährlich, da auf kurzen Distanzen sowohl Aufwinde mit Windgeschwindigkeiten von bis zu 50 Metern pro Sekunde als auch starke Abwinde auftreten können (Musil et al., 1991). Diese starken Vertikalwinde und die in Cumulonimben entstehenden großen Hagelkörner führen dazu, dass es weltweit nur sehr wenige Flugzeuge (und Piloten) gibt, die zu derartigen Messflügen in der Lage sind. Ein drittes Problem resultiert aus der Tatsache, dass wichtige physikalische Größen, die die Entwicklung der Feuchtkonvektion bestimmen, wie z.B. die Eigenschaften und die Größenverteilung des atmosphärischen Aerosols, überhaupt nur sehr schwer und mit großem Geräteaufwand gemessen werden können.

Fernerkundungsmethoden, die zur Erfassung von Wolken und Niederschlag auch deshalb optimal geeignet zu sein scheinen, weil sie die Untersuchung der räumlichen und zeitlichen

Verteilung sowie der Struktur des Niederschlags ermöglichen, scheitern ebenfalls oft an der Komplexität des Untersuchungsobjekts. So kann mit den inzwischen weit verbreiteten Wetterradaren nur eine einzige physikalische Größe, die so genannte Radarreflektivität, gemessen werden, die Rückschlüsse auf die Mikrophysik des Niederschlags erlaubt. Auf Grund der Vielzahl der Partikelarten und der fehlenden Kenntnis der Größenverteilung der Partikel ist die Interpretation dieser Messungen meist äußerst schwierig.

Aus den genannten Gründen ist gerade im Bereich der Feuchtkonvektion die numerische Simulation oft die einzige Möglichkeit die Wechselwirkungen der dynamischen und wolkenmikrophysikalischen Prozesse und ihre Auswirkungen auf die Niederschlagsbildung zu untersuchen. In einem numerischen Wolkenmodell werden dabei neben den grundlegenden hydrodynamischen Gleichungen auch die Bilanzgleichungen der Hydrometeore und alle wolkenmikrophysikalischen Prozesse, sofern diese überhaupt bekannt und näherungsweise quantifizierbar sind, berücksichtigt. Ein Wolkenmodell ist demnach eine möglichst genaue mathematische Umsetzung unseres derzeitigen physikalischen Kenntnisstands über die Wolken- und Niederschlagsprozesse in der Atmosphäre. Leider ist es aber auch mit den besten heute verfügbaren Großrechnern nicht möglich, alle Prozesse mit befriedigender Genauigkeit und Allgemeinheit zu berücksichtigen, d.h. bei jedem numerischen Wolkenmodell müssen in bestimmten Bereichen Näherungen gemacht werden, die die Genauigkeit und Anwendbarkeit einschränken. Mit der Zeit haben sich deshalb verschiedenste Methoden und Ansätze zur numerischen Simulation von Wolken entwickelt, die Vor- und Nachteile im Bereich der Dynamik bzw. Wolkenmikrophysik besitzen. Prinzipiell müssen dabei zwei Modelltypen unterschieden werden: *Wolkenmodelle mit detaillierter Wolkenmikrophysik* prognostizieren explizit die Größenverteilung einer oder mehrerer Hydrometeorarten. Dies führt, auf Grund der großen Anzahl von Größenklassen, zu einem sehr hohen numerischen Aufwand und die Rechenzeit des gesamten Modells wird von der Behandlung der Wolkenphysik dominiert. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, ist die Anwendung solcher Modelle meist auf eine oder zwei Raumdimensionen beschränkt, wodurch hydrodynamische Prozesse und Effekte nur eingeschränkt behandelt werden können. Ein anderer Zugang sind *Modelle mit parametrisierter Wolkenmikrophysik*, bei der die wolkenmikrophysikalischen Größen nur durch eine oder zwei Modellvariablen je Hydrometeorart beschrieben werden. Im Fall der einfachsten Parametrisierung, die bereits die Niederschlagsbildung beinhaltet, dem so genannten Kessler-Schema, werden nur die Massendichten der Wolken- und Regentropfen als Modellvariable berücksichtigt (Kessler, 1969). Wolkenmodelle mit parametrisierter Wolkenphysik sind sehr recheneffizient und der numerische Aufwand für die Behandlung der Wolkenmikrophysik ist kleiner oder vergleichbar

dem der Behandlung der hydrodynamischen Gleichungen.

In der vorliegenden Arbeit wird der Zugang über die parametrisierte Wolkenmikrophysik gewählt, wobei konsequent das Zwei-Variablen-Konzept verfolgt wird, d.h. neben den Massendichten werden auch die Anzahldichten der Partikel als Modellvariablen verwendet. Diese Vorgehensweise verspricht eine bessere und insbesondere konsistentere Behandlung der Wolkenmikrophysik als die meist angewandten Ein-Variablen-Parametrisierungen, die sich auf die Massendichten beschränken, und kann so vielleicht die Lücke zwischen den sehr aufwendigen Modellen mit detaillierter Wolkenmikrophysik und den doch sehr groben Näherungen der Ein-Variablen-Parametrisierungen schließen. Als hydrodynamische Basis dient im folgenden die neu entwickelte zweite Version des Karlsruher mesoskaligen Atmosphärenmodells (KAMM2).

Die grundlegenden hydrodynamischen Gleichungen werden im folgenden Kapitel angegeben, außerdem wird das verwendete Turbulenzmodell erläutert (Abschnitt 2.1). In Abschnitt 2.2 wird ein Überblick über die Eigenschaften der Hydrometeore gegeben. Einen Abriss der detaillierten theoretischen Formulierung der Wolkenmikrophysik gibt Abschnitt 2.3. Abschnitt 2.4 enthält einen Überblick über Eigenschaften und Klassifikation konvektiver Systeme. Das zweite Kapitel widmet sich der Parametrisierung der Wolkenmikrophysik von Tropfen. Es wird eine integrale Theorie der Koagulationsprozesse vorgestellt, die auf eine neue Zwei-Variablen-Parametrisierung führt. Ein quantitativer Vergleich mit einer detaillierten Behandlung der Koagulationsprozesse dient der Verifikation. Kapitel 3 widmet sich der Parametrisierung wolkenmikrophysikalischer Prozesse in Mischwolken, wobei der Schwerpunkt wiederum auf der Formulierung einer Zwei-Variablen-Parametrisierung der Kollisionswechselwirkungen der unterschiedlichen Hydrometeortypen liegt. Hier werden verbesserte Näherungen für die Kollisions- und Umwandlungsraten hergeleitet. Ergebnisse der Simulation hochreichender Konvektion unter idealisierten atmosphärischen Bedingungen bilden den Inhalt von Kapitel 4. Dabei wird gezeigt, dass das neu entwickelte Wolkenchema in der Lage ist, in einem weiten Parameterbereich die Eigenschaften konvektiver Mischwolken zu simulieren. Insbesondere kann erstmals das unterschiedliche Verhalten hochreichender Konvektion, je nachdem ob maritime oder kontinentale Bedingungen vorherrschen, durch Modellrechnungen untersucht werden.

Kapitel 2

Grundlagen und Kenntnisstand

2.1 Hydrodynamik

2.1.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Die Atmosphäre wird als mehrkomponentiges, heterogenes System betrachtet, das aus den gasförmigen Bestandteilen trockene Luft und Wasserdampf sowie aus Flüssigwasser und Eis in Form verschieden großer Partikel besteht. Auf der Basis der Thermodynamik irreversibler Prozesse führen die Erhaltungsaxiome für Impuls, Masse und Energie auf die folgenden Bilanzgleichungen (Herbert, 1973a; Doms und Herbert, 1985):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathfrak{J} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) = -\frac{d\rho}{dt} - \nabla \cdot (\mathbf{I}^h + \mathbf{S}) - \mathfrak{J} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{I}_k + I_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Dabei ist \mathbf{v} die baryzentrische Geschwindigkeit, d.h. die Schwerpunktgeschwindigkeit des Gesamtsystems. Die weiteren prognostischen Größen sind die Gesamtdichte ρ , die Partialedichten von trockener Luft ρ_0 , Wasserdampf ρ_1 , Flüssigwasser ρ_2 und Eis ρ_3 sowie die spezifische Enthalpie h . In der Impulsgleichung treten der Druck p , die Schwerebeschleunigung \mathbf{g} , die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation $\boldsymbol{\Omega}$ und der molekulare Impulsflusstensor \mathfrak{J} auf. Auf den rechten Seiten der Bilanzgleichungen für die Partialmassen stehen die Diffusionsflüsse \mathbf{I}_k und die Phasenflüsse I_k . In der Gleichung für die Enthalpie treten der

Wärmefluss \mathbf{I}^h und der Strahlungsfluss \mathbf{S} auf. Dabei gelten auf Grund der Massenerhaltung Nebenbedingungen für die Partialdichten

$$\sum_{k=0}^3 \rho_k = \rho \quad (2.5)$$

und die Phasenflüsse

$$\sum_{k=0}^3 I_k = 0 \quad (2.6)$$

und, da \mathbf{v} als die Schwerpunktgeschwindigkeit des Gesamtsystems definiert wird, folgt für die Diffusionsflüsse

$$\sum_{k=0}^3 \mathbf{I}_k = 0. \quad (2.7)$$

Äquivalent zur obigen lokalen Formulierung kann unter Verwendung der Euler-Entwicklung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.8)$$

auch eine substantielle Darstellung verwendet werden:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathfrak{J} \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\frac{dp}{dt} - \nabla \cdot (\mathbf{I}^h + \mathbf{S}) - \mathfrak{J} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{I}_k + I_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Auf der Basis einer Skalenanalyse für konvektive, mesoskalige Wolken und auf Grund der allgemeinen atmosphärischen Bedingungen können noch einige Approximationen angewandt werden.

- Trockene Luft und Wasserdampf werden als ideale Gase, Flüssigwasser und Eis als inkompressibel angenommen. Als Zustandsgleichung kann dann

$$\rho = \sum_{k=0}^3 \rho_k = \frac{p}{R_0 T} - \left(\frac{R_1}{R_0} - 1 \right) \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \quad (2.13)$$

verwendet werden, wobei R_0 und R_1 die individuellen Gaskonstanten von trockener Luft und Wasserdampf sind. Meist können die Partialdichten der Hydrometeore gegen

die Dichte feuchter Luft vernachlässigt werden (Doms und Herbert, 1985).

- Mit der Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\rho_k}{\rho} = \sum_{k=0}^3 x_k = 1 \quad (2.14)$$

mit den Massenbrüchen x_k gelten die thermodynamischen Relationen

$$\left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p, x_k} = \sum_{k=0}^3 c_{pk} x_k = c_p \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_{T, x_k} = v - T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_{p, x_k} = v_2 x_2 + v_3 x_3 \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x_2} \right|_{T, p} = h_2 - h_1 = L_{wd} \quad (2.17)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x_3} \right|_{T, p} = h_3 - h_1 = L_{ed}. \quad (2.18)$$

Dabei ist v_k das spezifische Volumen der k -ten Komponente. Da die trockene Luft und der Wasserdampf als ideale Gase angenommen werden, die flüssigen und festen Partitionen hingegen als inkompressibel, gilt für den thermischen Expansionskoeffizienten

$$T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_{p, x_k} = T \sum_{k=0}^3 \left(x_k \left. \frac{\partial v_k}{\partial T} \right|_{p, x_k} \right) = -v_0 x_0 - v_1 x_1. \quad (2.19)$$

Für die spezifischen Wärmen sowie die Umwandlungswärmen können unter atmosphärischen Bedingungen in guter Näherung die Werte

$$c_{p0} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \quad (2.20)$$

$$c_{p1} = 1850 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \quad (2.21)$$

$$c_{p2} \equiv c_w = 4218 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \quad (2.22)$$

$$c_{p3} \equiv c_e = 2110 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \quad (2.23)$$

$$L_{wd} = h_1 - h_2 = 2.501 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1} \quad (2.24)$$

$$L_{ed} = h_1 - h_3 = 2.834 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1} \quad (2.25)$$

verwendet werden (Laube und Höller, 1990). Im folgenden wird jedoch außerdem die weitergehende Näherung $c_p = c_{p0}$ verwendet.

- Trockene Luft ist chemisch inaktiv, d.h. $I_0 \equiv 0$, woraus

$$\sum_{k=1}^3 I_k = 0 \quad (2.26)$$

folgt.

- Räumliche Änderungen der Schwerebeschleunigung werden vernachlässigt. Dann ist

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (2.27)$$

mit $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ (\mathbf{k} : vertikaler kartesischer Einheitsvektor).

Damit kann die Bilanzgleichung für die Enthalpie in eine Temperaturgleichung überführt werden (siehe z.B. Doms und Herbert, 1985):

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + L_{wd} I_2 + L_{ed} I_3 + Q \quad (2.28)$$

mit

$$Q = -\nabla \cdot (\mathbf{I}_s^h + \mathbf{S}) - \sum_{k=1}^3 (c_{pk} - c_{p0}) \mathbf{I}_k \cdot \nabla T - \mathcal{J} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.29)$$

sowie dem reduzierten Wärmefluss

$$\mathbf{I}_s^h = \mathbf{I}^h - \sum_{k=1}^3 h_k \mathbf{I}_k. \quad (2.30)$$

Aus der Zustandsgleichung gewinnt man mit der Gaskonstanten für feuchte Luft

$$R_f = R_0 \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_0} - 1 \right) x_1 \right] \quad (2.31)$$

die Approximation:

$$\frac{dp}{dt} = R_f \rho \frac{dT}{dt} - \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.32)$$

so dass sich die Temperaturgleichung in der Form

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{R_f T}{c_v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho c_v} (L_{wd} I_2 + L_{ed} I_3 + Q) \quad (2.33)$$

schreiben lässt. In ähnlicher Weise kann aus der Kontinuitätsgleichung eine prognostische Gleichung für den Druck hergeleitet werden, die die prognostische Gleichung für die Gesamtdichte ersetzen kann:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{c_p}{c_v} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{R_f}{c_v} (L_{wd} I_2 + L_{ed} I_3 + Q). \quad (2.34)$$

Damit sind die prognostischen molekularen hydrodynamischen Grundgleichungen in der Form hergeleitet, wie sie bei der weiteren Herleitung der im Atmosphärenmodell KAMM2 verwendeten Gleichungen vorausgesetzt werden. Diese Gleichungen werden noch einmal zusammengefasst:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathfrak{J} \quad (2.35)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{R_f}{c_v} T \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho c_v} (L_{wd}l_w + L_{ed}l_e + Q) \quad (2.36)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{c_p}{c_v} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{R_f}{c_v} (L_{wd}l_w + L_{ed}l_e + Q) \quad (2.37)$$

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{l}_k + l_k, \quad k = d, w, e. \quad (2.38)$$

Die Partialdichten sowie die Phasen- und Sedimentationsflüsse wurden dabei umbenannt, um im folgenden Verwechslungen zu vermeiden: $\rho_d \equiv \rho_1, \rho_w \equiv \rho_2, \rho_e \equiv \rho_3, l_d \equiv l_1$, usw.

2.1.2 Einführung eines Grundzustandes

Insbesondere um die Formulierung der Randbedingungen an den als offen angenommenen seitlichen Rändern zu erleichtern, wird in KAMM2, wie in vielen mesoskaligen Atmosphärenmodellen, ein Grundzustand eingeführt, d.h. die Geschwindigkeit und die drei thermodynamischen Variablen werden in Grundzustandsgrößen und Abweichungen zerlegt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_* \quad (2.39)$$

$$T = T_0 + T_* \quad (2.40)$$

$$p = p_0 + p_* \quad (2.41)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_* \quad (2.42)$$

(ρ_0 ist hier und im folgenden die Dichte des Grundzustandes, nicht die Partialdichte trockener Luft - diese wird nun mit ρ_a bezeichnet). Dieser Grundzustand ist stationär, geostrophisch, hydrostatisch und trocken. Die Grundzustandsgrößen erfüllen damit die Beziehung

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0 - g\mathbf{k}. \quad (2.43)$$

Verwendet man außerdem noch die Näherungen

$$\left| \frac{T_*}{T_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{p_*}{p_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\rho_*}{\rho_0} \right| \ll 1, \quad (2.44)$$

so erhält man das folgende PDGL-System (siehe Baldauf, 2001):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_* - \frac{\rho_*}{\rho_0} \mathbf{g}' - 2 \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathfrak{J} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial T_*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_* + \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 = -\frac{R_f}{c_v} T_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0 c_v} (L_{wd} l_w + L_{ed} l_e + Q) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_* + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 = -\frac{c_p}{c_v} \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{R_f}{c_v} (L_{wd} l_w + L_{ed} l_e + Q) \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_k = -\rho_k \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{l}_k + l_k, \quad k = d, w, e \quad (2.48)$$

mit $\mathbf{g}' = \mathbf{g}\mathbf{k} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0$. Aus Gl. (2.43) gewinnt man außerdem noch

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 = -\rho_0 \mathbf{v} \cdot (\mathbf{g}\mathbf{k} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0) = -\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}'. \quad (2.49)$$

Auch in der Zustandsgleichung können Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} - \frac{T_*}{T_0} - \left(\frac{R_d}{R_l} - 1 \right) \frac{\rho_d}{\rho_0} + \frac{\rho_w}{\rho_0} + \frac{\rho_e}{\rho_0}. \quad (2.50)$$

Die Dichteabweichung ρ_* tritt im obigen Gleichungssystem nur noch im Auftriebsterm auf, in den damit auch die Partialdichten der Hydrometeore eingehen. Dieser Einfluss wird, insbesondere für ρ_w , als 'liquid water drag' bezeichnet (siehe z.B. Doms und Herbert, 1985).

Die Formulierung der Phasen- und Diffusionsflüsse wird ausführlich von Herbert (1973b) auf der Basis der Thermodynamik irreversibler Prozesse diskutiert. Auf der konvektiven Skala sind die molekularen Diffusionsflüsse gegenüber den turbulenten vernachlässigbar; die turbulente Diffusion wird im nächsten Abschnitt behandelt. Die explizite Formulierung der Phasenflüsse l_w und l_e sowie der Diffusionsflüsse \mathbf{l}_k , die durch die Fallbewegung der Hydrometeore verursacht werden, ist Aufgabe der Wolkenmikrophysik (siehe z.B. Abschnitt 3.1.3).

An dieser Stelle muss noch erwähnt werden, dass im Atmosphärenmodell KAMM2 noch eine weitere Zerlegung der Variablen verwendet wird. Dabei wird neben einem Grundzustand, der im Gegensatz zu der gegebenen Herleitung als ruhend angenommen wird, noch ein so genannter Referenzzustand eingeführt. Die in der vorliegenden Arbeit als Grundzustand bezeichnete Größe entspricht der Summe aus dem KAMM2-Grundzustand und dem KAMM2-Referenzzustand (siehe Baldauf, 2001).

2.1.3 Reynoldsmittelung und Turbulenzparametrisierung

Im folgenden wird eine kurzer Überblick über die Problematik der Turbulenzparametrisierung gegeben. Details, auf die hier nicht eingegangen werden kann, findet man ausführlich bei

Baldauf (2001).

Um die kleinskaligen turbulenten Fluktuationen, die durch ein mesoskaliges Modell nicht aufgelöst werden können, in dem Gleichungssystem zu berücksichtigen, wird die so genannte Reynoldsmittelung verwendet. Bei der Reynoldsmittelung werden die Variablen in einen Ensemblemittelwert und turbulente Fluktuationen zerlegt:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (2.51)$$

$$T_* = \bar{T} + T' \quad (2.52)$$

$$p_* = \bar{p} + p' \quad (2.53)$$

$$\rho_* = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.54)$$

$$\rho_k = \bar{\rho}_k + \rho'_k. \quad (2.55)$$

Diese Zerlegung wird nun in das PDGL-System (2.45)-(2.48) eingesetzt und unter Verwendung der Mittelungsregeln

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} \quad (2.56)$$

$$\overline{a b} = \bar{a} \bar{b} \quad (2.57)$$

$$\overline{\frac{\partial a}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\overline{\nabla a} = \nabla \bar{a} \quad (2.59)$$

$$\bar{\bar{a}} = \bar{a} \quad (2.60)$$

$$\bar{a'} = 0 \quad (2.61)$$

$$\overline{a b} = \bar{a} \bar{b} + \overline{a' b'} \quad (2.62)$$

erhält man Gleichungen für die Mittelwerte der Variablen. Für die Partialdichte von Wasserdampf ρ_k ergibt sich z.B.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot [\bar{\mathbf{v}} \bar{\rho}_k + \mathbf{A}_d + \mathbf{I}_d] = \bar{I}_k, \quad (2.63)$$

wobei $\mathbf{A}_d = \overline{\mathbf{v}' \rho'_d}$ der turbulente Wasserdampffluss ist. Entsprechend treten in den anderen

Bilanzgleichungen turbulente Flüsse der Form

$$\mathfrak{Q} = \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \quad (\text{turbulenter Impulsfluss}) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{A}_T = \overline{\mathbf{v}'T'} \quad (\text{turbulenter Wärmefluss}) \quad (2.65)$$

$$\mathbf{A}_w = \overline{\mathbf{v}'\rho'_w} \quad (\text{turbulenter Flüssigwasserfluss}) \quad (2.66)$$

$$\mathbf{A}_e = \overline{\mathbf{v}'\rho'_e} \quad (\text{turbulenter Fluss von Eis}) \quad (2.67)$$

auf, die - wie \mathbf{A}_d - nicht bekannt sind und parametrisiert werden müssen. Druckkorrelationen der Form $\overline{\mathbf{v}'p'}$ werden vernachlässigt. Zur Parametrisierung der Flüsse werden Diffusionsansätze folgender Form verwendet:

$$\mathfrak{Q} = -K_m \left(\nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \mathfrak{E} \right) \quad (2.68)$$

$$\mathbf{A}_T = -K_h \nabla T \quad (2.69)$$

$$\mathbf{A}_d = -K_d \nabla \rho_d \quad (2.70)$$

$$\mathbf{A}_w = -K_w \nabla \rho_w \quad (2.71)$$

$$\mathbf{A}_e = -K_e \nabla \rho_e. \quad (2.72)$$

Dabei ist \mathfrak{E} der Einheitstensor. Die Diffusionskoeffizienten werden in Abhängigkeit von der turbulenten kinetischen Energie (TKE)

$$E_T = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} = \frac{1}{2} \overline{u'u' + v'v' + w'w'}$$

durch

$$K_m = c_\mu l_\mu E_T^{\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

$$K_h = K_d = K_w = K_e = \frac{K_m}{N_{Pr}} \quad (2.74)$$

formuliert. Dabei werden für $c_\mu = 0.55$ und für die turbulente Prandtl-Zahl $N_{Pr} = 1/3$ angenommen. Für den Mischungsweg l_μ wird der Ansatz nach Blackadar und Tennekes (1968) mit $l_\infty = 100$ m und einer Stabilitätsabhängigkeit verwendet (siehe Baldauf, 2001).

Bei dieser Turbulenzschließung muss dann eine zusätzliche prognostische Gleichung für die turbulente kinetische Energie berechnet werden. Diese TKE-Gleichung erhält man, indem die Bewegungsgleichung der Geschwindigkeitsfluktuationen skalar mit \mathbf{v}' multipliziert und dann eine Mittelung durchgeführt wird. In parametrisierter Form ergibt sich dann die prognostische

TKE-Gleichung

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla E_T - \nabla \cdot (K_h \nabla E_T) = P_T + G_T - \epsilon_T \quad (2.75)$$

mit dem Scherungsterm P_T , dem Auftriebsterm G_T und dem Dissipationsterm ϵ_T , die die folgende Form haben:

$$P_T = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = \left[K_m \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_l} \right) + \frac{2}{3} E_T \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \quad (2.76)$$

$$G_T = g w' \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} - a_{dl} q'_d - q'_w - q'_e \right) = -g K_h \left[A_G \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{q}_w}{\partial z} - \frac{\partial \bar{q}_e}{\partial z} \right] \quad (2.77)$$

$$\epsilon_T = c_\epsilon \frac{E_T^2}{K_m} \quad (2.78)$$

mit $c_\epsilon = 0.088$ und $a_{dl} = R_d/R_l - 1$. Der Faktor A_G in Gleichung (2.77) lautet

$$A_G = \frac{1}{\bar{\theta}} \left(1 + \frac{L_{wd} \bar{q}_d}{R_d T} \right) \left(1 + \frac{R_l L_{wd}^2 \bar{q}_d}{c_p R_d^2 T^2} \right)^{-1} \quad (2.79)$$

Die Berücksichtigung der Mischungsverhältnisse $q_k = \rho_k/\rho_a$ bei der Parametrisierung des Auftriebsterms folgt Klemp und Wilhelmson (1978) bzw. Xue et al. (1995), die ein ähnliches TKE-Modell verwenden, allerdings mit einem lokalen Ansatz für den Mischungsweg, der nur von den Gittermaschenweiten abhängt (d.h. $l_\mu = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}$).

Unter Vernachlässigung der molekularen Diffusion gegenüber der turbulenten Diffusion ergibt sich damit für die Partialdichten die prognostische Gleichung

$$\frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot [\bar{\mathbf{v}} \bar{\rho}_k] - \nabla \cdot [K_h \nabla \bar{\rho}_k] = \bar{I}_k, \quad k = d, w, e. \quad (2.80)$$

Problematisch ist hierbei die Interpretation der mittleren Phasenumwandlungen \bar{I}_k , da auf Grund der Nichtlinearität dieser Prozesse die turbulenten Fluktuationen hier ebenfalls einen Einfluss haben können.

Im weiteren wird bei der Bezeichnung der Variablen auf den die Reynoldsmittelung kennzeichnenden Querstrich verzichtet.

2.2 Die physikalischen Eigenschaften der Hydrometeore

Der Aufbau und die Dynamik von Wolken wird zu einem großen Teil durch die Anwesenheit und die Wechselwirkungen der Hydrometeore bestimmt. Im folgenden werden einige wichtige Fakten über deren Geometrien, Fallgeschwindigkeiten und Koagulationseigenschaften dargestellt, wobei auf Grund der Komplexität des Themas manches nur gestreift werden kann. Für Details muss hier auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

2.2.1 Geometrie

Wolken- und Regentropfen sind bis zu einem Durchmesser von ca. 1 mm sphärisch und nur größere Tropfen weichen von der Kugelform ab, indem sie während des Fallens eine ovale, abgeplattete Form annehmen (Pruppacher und Klett, 1997; S. 31). Die von Magono und Lee (1966) eingeführte Klassifikation von Eispartikeln unterscheidet hingegen 80 verschiedene Formen (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 45-46). Grundformen sind hierbei Eiskristalle in Form von hexagonalen Plättchen und Säulen sowie Dendriten und Graupel. Auf Grund dieser Vielfalt komplexer Formen werden die physikalischen Eigenschaften meist anhand von in-situ Messungen bestimmt. Die Messergebnisse werden üblicherweise als empirische Beziehungen zwischen der Teilchenmasse und dem maximalen Durchmesser in Form von Potenzgesetzen angegeben. Tabelle 2.1 gibt für einige Partikelarten Massen-Durchmesser-Relationen nach Locatelli und Hobbs (1974) an. Enger an der Magono-Lee-Klassifikation orientiert sich die Darstellung von Heymsfield und Kajikawa (1987) (siehe Tabelle 2.2).

Tabelle 2.1: Empirische Beziehungen zwischen Fallgeschwindigkeit v , maximalem Durchmesser D und Masse x für ausgewählte Niederschlagspartikeltypen nach Locatelli und Hobbs (1974). Außerdem sind die gemessenen Durchmesser- und Dichteintervalle angegeben.

Partikelklasse	Fallgesetz $v(x)$ (v in ms^{-1} , x in kg)	Durchmesser $D(x)$ (D in m, x in kg)	Dichte ρ_g (ρ_g in g cm^{-3})	Durchmesser (in mm)
lump graupel 1	$v = 10.33 x^{0.15}$	$D = 0.288 x^{1/3}$	0.05 – 0.10	0.5 – 2.0
lump graupel 2	$v = 66.10 x^{0.24}$	$D = 0.346 x^{1/2.8}$	0.10 – 0.20	0.5 – 3.0
lump graupel 3	$v = 9.54 x^{0.12}$	$D = 0.346 x^{1/2.7}$	0.20 – 0.45	0.5 – 1.0
mixed aggregates	$v = 27.70 x^{0.22}$	$D = 8.156 x^{1/1.9}$		0.2 – 3.0

Tabelle 2.2: Empirische Beziehungen zwischen Fallgeschwindigkeit v , maximalem Durchmesser D und Masse x für ausgewählte Niederschlagspartikeltypen nach Heymsfield and Kajikawa (1987). Außerdem sind die gemessenen Durchmesserintervalle angegeben.

Partikelklasse	Fallgesetz $v(x)$ (v in ms^{-1} , x in kg)	Durchmesser $D(x)$ (D in m , x in kg)	Durchmesser (in mm)
hex plate (P1a)	$v = 41.9 x^{0.26}$	$D = 0.22 x^{1/3.31}$	0.02 – 7.0
dendrite (P1e)	$v = 11.0 x^{0.21}$	$D = 5.17 x^{1/2.29}$	0.07 – 10.8
lump graupel (R4b)	$v = 101.2 x^{0.29}$	$D = 0.19 x^{1/3.10}$	0.4 – 9.0
cold lump graupel (R4b)	$v = 46.4 x^{0.26}$	$D = 0.18 x^{1/3.21}$	0.5 – 9.0
conical graupel (R4c)	$v = 59.0 x^{0.25}$	$D = 0.21 x^{1/3.06}$	0.8 – 8.6

2.2.2 Fallgeschwindigkeit

Als Fallgeschwindigkeit der Hydrometeore wird hier die unbeschleunigte, stationäre Sedimentationsgeschwindigkeit bezeichnet, die sich aus dem Gleichgewicht zwischen Schwerkraft, Druckgradientkraft und Reibungskraft ergibt. Für kleine sphärische Partikel wie z.B. Wolkentropfen kann die Fallgeschwindigkeit in guter Näherung durch die Stokes-Lösung beschrieben werden (Pruppacher und Klett, 1997; S. 415):

$$v_{Stokes} = \frac{2 g \rho_w}{9 \eta_a} r^2 = \left(\frac{1}{162 \pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{g \rho_w}{\nu_a \rho_a} x^{\frac{2}{3}}. \quad (2.81)$$

Dabei ist ρ_w die Materialdichte von flüssigem Wasser, ρ_a die Luftdichte und η_a bzw. ν_a bezeichnen die dynamische bzw. kinematische Viskosität von Luft. Die Fallgeschwindigkeit großer Tropfen, bei der sowohl die Turbulenz als auch die Verformung der Tropfen eine Rolle spielt, wurde von z.B. Berry und Pranger (1974) gemessen (siehe Abbildung 2.1). Demnach erreichen große Regentropfen in der Nähe des Erdbodens eine maximale Sedimentationsgeschwindigkeit von ca. 10 ms^{-1} . Eine gute Approximation dieses Fallgesetzes ist der Ansatz von Rogers et al. (1993):

$$v_{Rogers} = \begin{cases} a_{Ro1} - b_{Ro1} e^{-c_{Ro1} D}, & D \geq D_{Ro} \\ a_{Ro2} D (1 - e^{-b_{Ro2} D}), & D < D_{Ro} \end{cases} \quad (2.82)$$

mit $a_{R01} = 9.65 \text{ m s}^{-1}$, $b_{R01} = 10.3 \text{ m s}^{-1}$, $c_{R01} = 600 \text{ m}^{-1}$, $a_{R02} = 4 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, $b_{R02} = 1.2 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ und $D_{R0} = 7.45 \times 10^{-4} \text{ m}$. Das Potenzgesetz nach Kessler (1969)

$$v_{Kessler} = a_{KS} \left(\frac{D}{D_{KS}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.83)$$

mit $a_{KS} = 13 \text{ m s}^{-1}$ und $D_{KS} = 1 \text{ cm}$ ist dagegen nur eine sehr grobe Näherung und zeigt deutliche Abweichungen von der gemessenen Fallgeschwindigkeit wie man in Abb. 2.1 erkennt.

Die Sedimentationsgeschwindigkeiten von Eispartikeln werden, wie auch die Durchmesser-Masse-Beziehungen, meist durch Messungen bestimmt und durch empirische v - D -Potenzgesetze approximiert (siehe Tabellen 2.1 und 2.2). Eine andere physikalisch besser begründbare Formulierung eines Fallgesetzes ist die Ableitung einer Beziehung zwischen den beiden dimensionslosen Kennzahlen, die die Falleigenschaften der Partikel bestimmen: Der Davies-Zahl

$$N_{Davies} = \frac{2xD^2g}{\rho_a\nu_a^2A} \quad (2.84)$$

und der Reynolds-Zahl

$$N_{Re} = \frac{vD}{\nu_a}. \quad (2.85)$$

Dabei ist x die Partikelmasse, A die Querschnittsfläche, g die Schwerebeschleunigung, ρ_a die Luftdichte und ν_a die kinematische Viskosität der Luft. Heymsfield und Kajikawa (1987) geben neben den v - D -Potenzgesetzen auch N_{Davies} - N_{Re} -Beziehungen an. Noch weiter geht die Theorie von Böhm (1989, 1990): Dabei wird postuliert, dass eine einzige N_{Davies} - N_{Re} -Beziehung ausreicht, um auf der Basis einer Grenzschichttheorie gute Näherungen für die Sedimentationsgeschwindigkeit beliebig geformter Hydrometeore herzuleiten.

In Abbildung 2.2 sind verschiedene Fallgesetze für hexagonale Eisplättchen dargestellt. Große Eiskristalle dieser Form erreichen eine Fallgeschwindigkeit von ca. 1 m s^{-1} und sind damit deutlich langsamer als große Tropfen. Es fällt auf, dass das Potenzgesetz nach Locatelli und Hobbs (1974) durchweg die größten Fallgeschwindigkeiten angibt. Für kleine Partikel überschätzen die beiden v - D -Potenzgesetze nach Locatelli und Hobbs (1974) sowie Heymsfield und Kajikawa (1987) die Fallgeschwindigkeit im Vergleich zu den N_{Davies} - N_{Re} -Beziehungen nach Heymsfield und Kajikawa (1987) bzw. Böhm (1989).

Eine v - D -Beziehung für Schneeflocken in Form von unbereiften Aggregaten verschiedenartiger Eiskristalle wird von Locatelli und Hobbs (1974) angegeben. Wie Abbildung 2.3

zeigt, stimmt dieses Fallgesetz gut mit der Grenzschichttheorie nach Böhm (1990) überein. Das Fallgesetz sollte demnach allgemein anwendbar sein, obwohl von Locatelli und Hobbs (1974) nur 31 Partikel dieser Art gemessen wurden. Schneeflocken erreichen etwas höhere Sedimentationsgeschwindigkeiten als Eiskristalle.

In Abbildung 2.4 sind verschiedene Fallgesetze für unregelmäßige klumpige Graupelpartikel dargestellt. Graupel erreicht ähnlich hohe Fallgeschwindigkeiten wie große Tropfen.

Die bisher angeführten empirischen Fallgesetze gelten nur unter den atmosphärischen Bedingungen, bei denen die Messungen durchgeführt wurden. Meist geschieht dies am Boden, d.h. es ist insbesondere notwendig, die Höhenabhängigkeit auf Grund der Variation der Luftdichte zu berücksichtigen. Beard (1980) zeigt, dass diese Korrektur von der Größe bzw. der Reynolds-Zahl der Partikel abhängt. Während für kleine Partikel ein Korrekturfaktor proportional zu η^{-1} notwendig ist (siehe Stokessches Gesetz, Gl. (2.81)), ist die Höhenabhängigkeit der Sedimentationsgeschwindigkeit bei großen Reynoldszahlen ($N_{Re} > 1000$) proportional zu $\rho^{-1/2}$.

2.2.3 Koagulationseigenschaften von Tropfen

Kollisionseffizienz

Unter Koagulation versteht man das Zusammenstoßen und -fließen bzw. -haften von Hydrometeoren. Dieser Mechanismus basiert in erster Linie auf den unterschiedlichen Sedimentationsgeschwindigkeiten der Hydrometeore, d.h. die langsam fallenden Partikel werden von den schneller fallenden eingesammelt (sog. Schwerekoagulation). Entscheidend für diesen Prozess ist der hydrodynamische Wirkungsquerschnitt der stoßenden Teilchen. Dies veranschaulicht Abbildung 2.5. Unter Vernachlässigung der die Partikel umgebenden Strömung, d.h. für geradlinige Tajektorien, würde ein Teilchen mit Radius R mit allen Partikeln mit Radius r kollidieren, die sich im geometrischen Wirkungsquerschnitt $\pi(R+r)^2$ befinden. Auf Grund des Strömungsfeldes, das die Partikel umgibt, werden die Teilchen jedoch abgelenkt. Der hydrodynamische Wirkungsquerschnitt πy^2 ist deshalb im Allgemeinen kleiner als der geometrische. Definiert man die Kollisionseffizienz als Verhältnis von hydrodynamischem zu geometrischem Wirkungsquerschnitt

$$E_{koll} = \frac{y^2}{(R+r)^2}, \quad (2.86)$$

so ist der hydrodynamische Wirkungsquerschnitt durch $\pi(R+r)^2 E_{koll}(R, r)$ gegeben. Für kleine Tropfen bzw. kleine Reynolds-Zahlen kann das die Tropfen umgebende Strömungsfeld

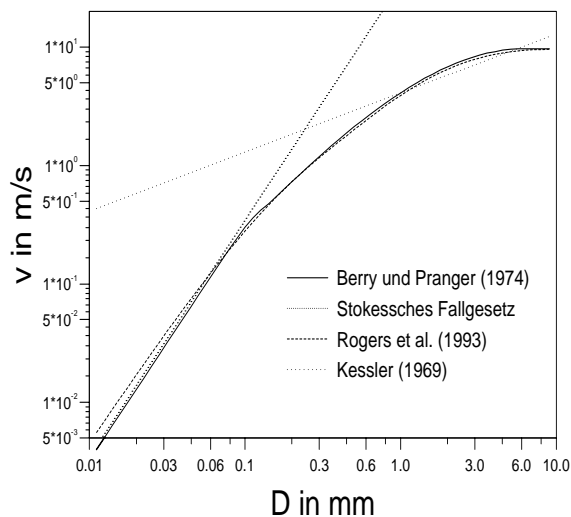


Abbildung 2.1: Fallgeschwindigkeit v von Wassertropfen in $m s^{-1}$ als Funktion des Tropfendurchmessers D in mm.

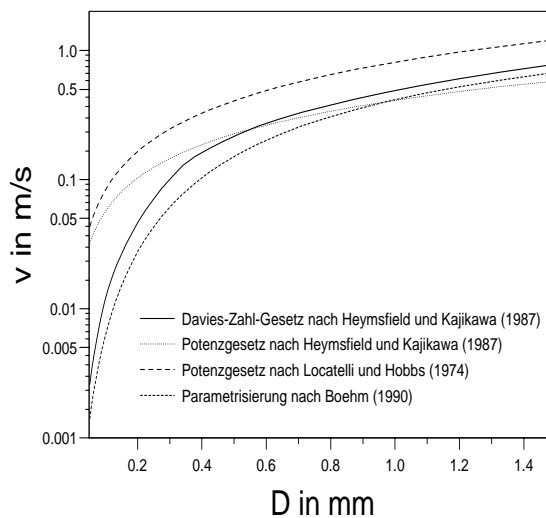


Abbildung 2.2: Fallgeschwindigkeit v hexagonaler Eisplättchen in $m s^{-1}$ als Funktion des Durchmessers D in mm.

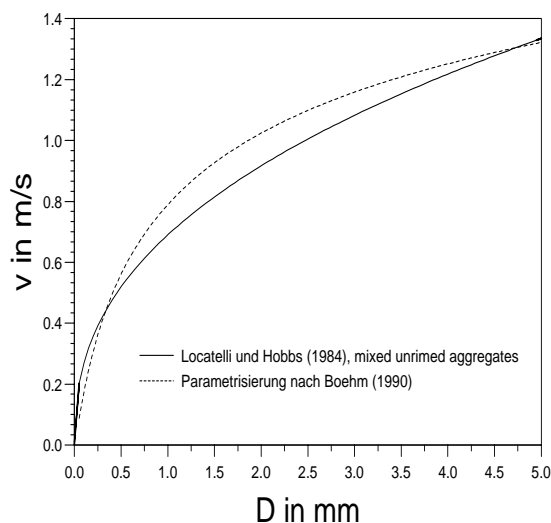


Abbildung 2.3: Fallgeschwindigkeit v von Schneeflocken in $m s^{-1}$ als Funktion des Durchmessers D in mm.

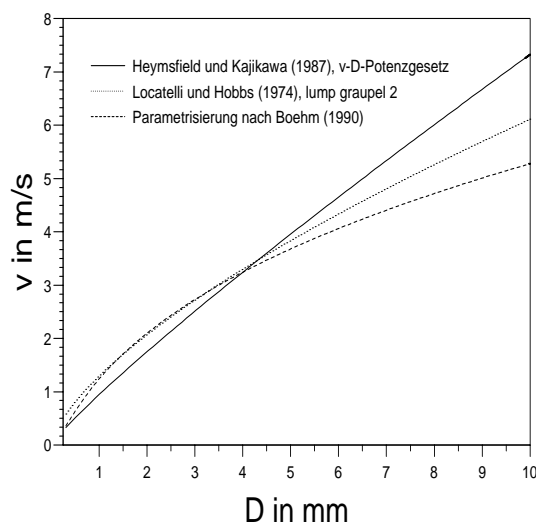


Abbildung 2.4: Fallgeschwindigkeit v von klumpigen Graupelpartikeln in $m s^{-1}$ als Funktion des Durchmessers D in mm.

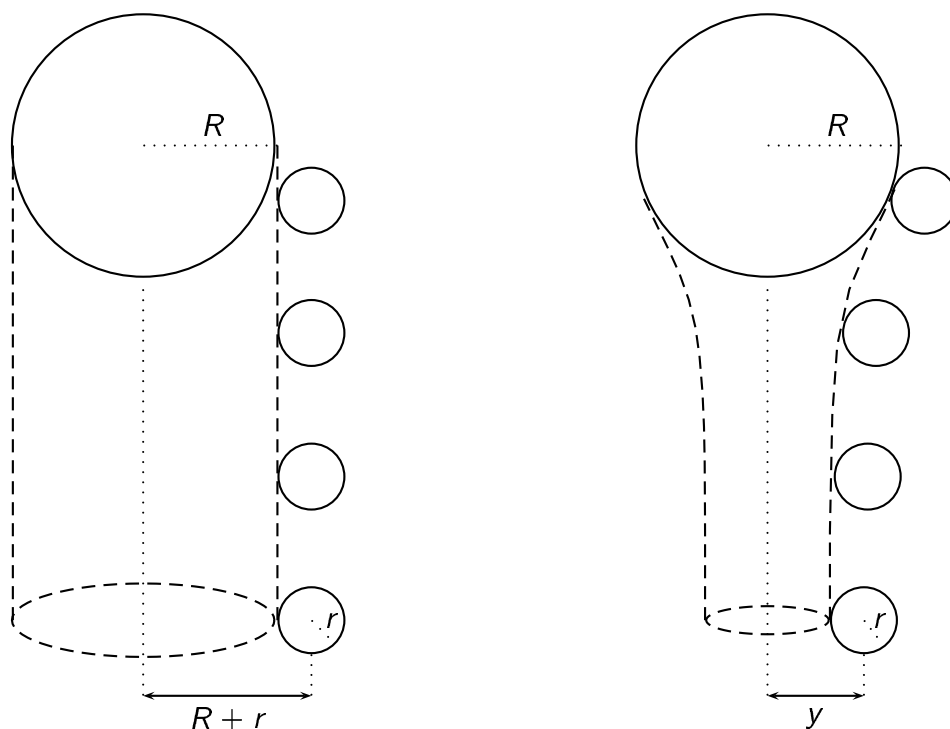


Abbildung 2.5: Geometrischer (links) und hydrodynamischer Wirkungsquerschnitt (rechts) für die Kollision zweier Tropfen mit Radien R und r .

mit der Stokes- oder der Oseen-Näherung beschrieben werden (Klett und Davis, 1973). Allerdings zeigen die verschiedenen analytischen Modelle im relevanten Größenbereich nur eine unbefriedigende Übereinstimmung (Pruppacher und Klett, 1997; S. 583). Pinsky et al. (2001) geben für einen großen Parameterbereich numerisch berechnete Werte für die Kollisionseffizienz von Tropfen an. Für $R > 500 \mu\text{m}$ muss E_{koll} allerdings extrapoliert werden, da in diesem Größenbereich weder gesicherte Messungen noch numerische Ergebnisse vorliegen. In Abbildung 2.6 ist die Kollisionseffizienz für Wassertropfen nach Pinsky et al. (2001) als Funktion der Tropfendurchmesser dargestellt, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Den Einfluss verschiedener Annahmen auf den Koagulationsprozess untersuchen Hu et al. (1998).

Die Wirkung der atmosphärischen Turbulenz auf die Koagulationsprozesse in Wolken ist noch weitgehend ungeklärt (Jonas, 1996; Pruppacher und Klett, 1997; Vaillancourt und Yau, 2000). Pinsky et al. (2000) und die Messungen von Vohl et al. (1999) zeigen jedoch, dass die atmosphärische Turbulenz zu einer signifikanten Erhöhung der Kollisionseffizienz führen kann. Für eine turbulente Dissipationsrate von $\epsilon = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ kann der Turbulenzeinfluss

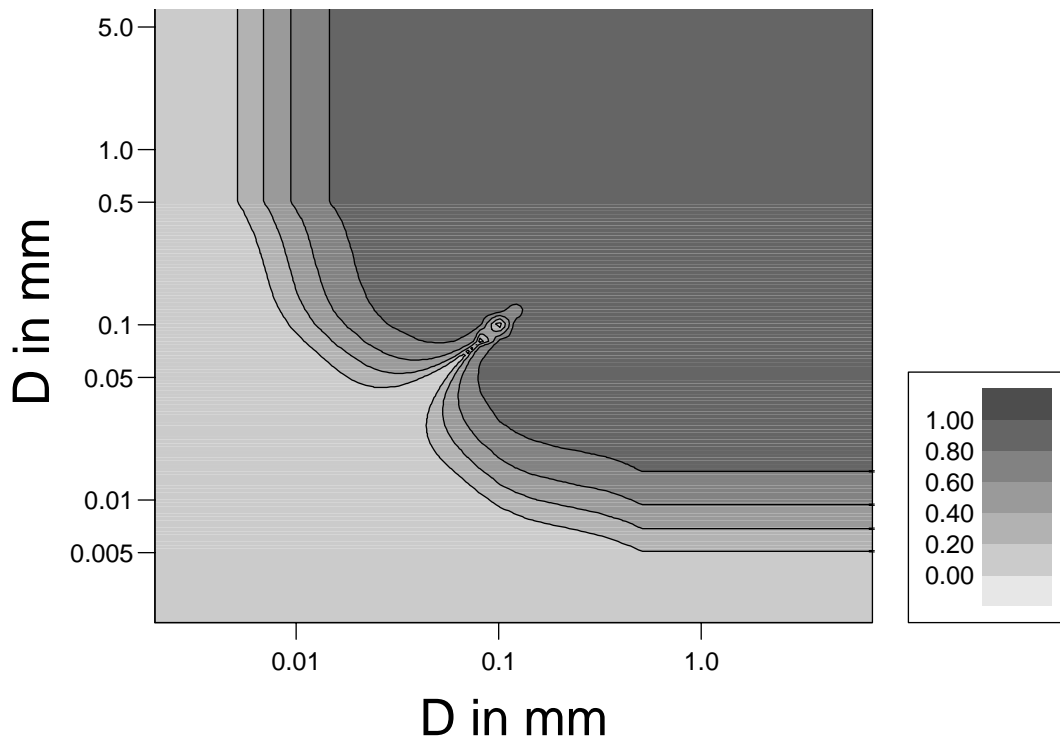


Abbildung 2.6: Kollisionseffizienz E_{koll} von Wassertropfen nach numerischen Berechnungen von Pinsky et al. (2001) als Funktion der Tropfendurchmesser D in mm. Für Durchmesser $D > 0.5$ mm sind die Werte extrapoliert.

näherungsweise wie folgt abgeschätzt werden (Khain, 2000; pers. Mitteilung):

$$E_{koll}(R, r, \epsilon = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}) = f_1(R) f_2(r/R) E_{koll}(R, r), \quad (2.87)$$

dabei ist R der Radius des größeren und r der des kleineren Tropfens. Die Funktionen f_1 und f_2 sind durch

$$f_1(R) = \begin{cases} 5.0, & R \leq 10 \text{ } \mu\text{m} \\ 2.0, & 10 \text{ } \mu\text{m} < R \leq 20 \text{ } \mu\text{m} \\ 1.5, & 20 \text{ } \mu\text{m} < R \leq 30 \text{ } \mu\text{m} \\ 1.3, & 30 \text{ } \mu\text{m} < R, \end{cases} \quad (2.88)$$

$$f_2(q) = \begin{cases} 2.4, & q \leq 0.2 \\ 1.2, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.89)$$

gegeben, wobei $q = r/R$ das Radienverhältnis ist (vgl. auch Pinsky und Khain, 2002).

Pinsky et al. (2001) diskutieren außerdem die Höhenabhängigkeit bzw. Druckabhängigkeit der Kollisionseffizienz. Dies wird im folgenden allerdings vernachlässigt.

Koaleszenzeffizienz und Breakup

Für Wassertropfen führen nicht alle Kollisionen auch zur Koaleszenz, d.h. zur stabilen Vereinigung der beiden Tropfen. Die Tropfen können stattdessen voneinander abprallen ('rebound') oder auch nach einer kurzen Phase der temporären Koaleszenz in zwei oder mehr Tropfen zerfallen ('breakup'). Abbildung 2.7 zeigt den zeitlichen Verlauf einer permanenten und einer temporären Koaleszenz zweier Tropfenpaare. Die Koaleszenzeffizienz von Wassertropfen wurde bislang nur experimentell untersucht. Nach Beard und Ochs (1995) wird die Koaleszenzeffizienz für die Kollision relativ kleiner Tropfen durch die Weber-Zahl

$$N_{We} = \frac{\rho_w r \Delta v^2}{\sigma_w} \quad (2.90)$$

und das Radienverhältnis $q = r/R$ bestimmt. Dabei ist r der Radius des kleineren und R der des größeren Tropfens, Δv ist die Differenz der Fallgeschwindigkeiten und σ_w die Oberflächenspannung von Wasser. Beard und Ochs (1995) zeigen, dass die Koaleszenzeffizienz nur eine Funktion der dimensionslosen Größe

$$X = \frac{2^{\frac{3}{2}} q^4 (1+q)}{6\pi (1+q^2)(1+q^3)} N_{We}^{\frac{1}{2}} \quad (2.91)$$

ist. Die Messdaten werden dann durch die lineare Regression

$$E_{koal} = 0.767 - 10.14X \quad (2.92)$$

sehr gut beschrieben. Nach Beard und Ochs (1995) ist diese Näherung für Tropfen im Bereich 100-400 μm Radius anwendbar.

Die Koaleszenz- und Breakup-Eigenschaften größerer Tropfen wurden von Low und List (1982a, 1982b) untersucht. Die Koaleszenzeffizienz ist dann unter anderem eine Funktion der kinetischen Energie der Kollision und soll hier nicht im Detail diskutiert werden.

Im folgenden wird eine Näherung für die Koaleszenzeffizienz verwendet, die für kleine Tropfen der obigen Approximation nach Beard und Ochs (1995) folgt und für große Tropfen in die Koaleszenzeffizienz nach Low und List (1982a, 1982b) übergeht. Diese Funktion ist in Abb. 2.8 dargestellt. Für Tropfen mit einem Durchmesser kleiner als 0.5 mm ist die Koaleszenzeffizienz sehr hoch und es finden nur wenige Breakup-Vorgänge statt. Größere Tropfen werden jedoch instabil und viele Kollisionen führen nicht zu einer stabilen Koaleszenz,

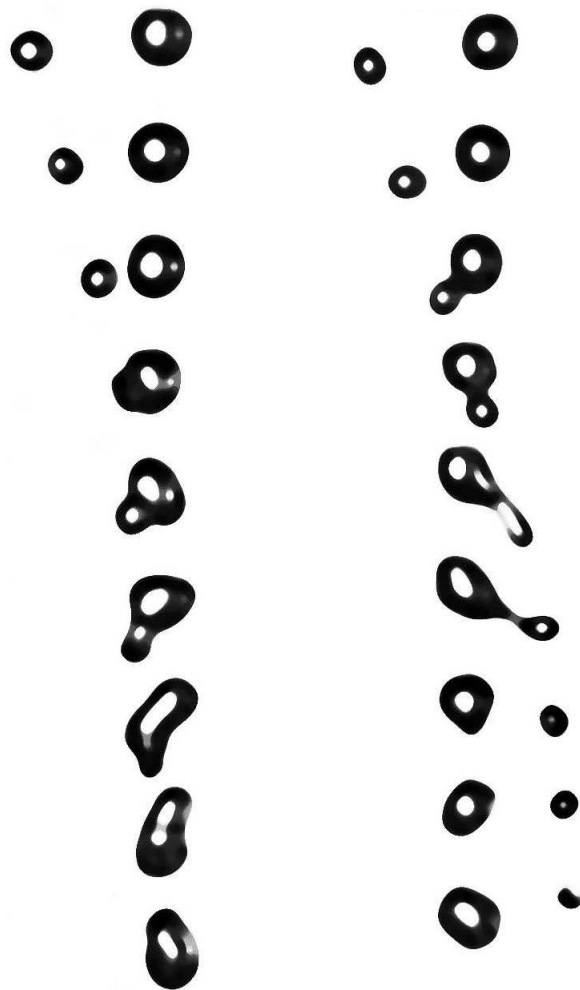


Abbildung 2.7: Permanente (links) und temporäre Koaleszenz (rechts) von Wassertropfen (nach Montgomery, 1971).

sondern zum Zerplatzen der Tropfen. Bei den Kollisionen von Tropfen größer 1.0 mm dominieren deshalb die Breakup-Vorgänge, die wieder kleinere Tropfen erzeugen.

Um einen Breakup-Vorgang vollständig zu beschreiben, ist es auch notwendig, die Anzahl und Größe der Fragmente anzugeben, die bei beliebigen Kollisionen entstehen können. Diese so genannten Bruchstückverteilungsfunktionen wurden ebenfalls von Low und List (1982a, 1982b) aus Messungen abgeleitet. Der Breakup-Vorgang wird auch ausführlich von Hu und Srivastava (1995), Tsias (1996) und Mayer (2000) diskutiert (siehe auch Abschnitt 2.3.2).

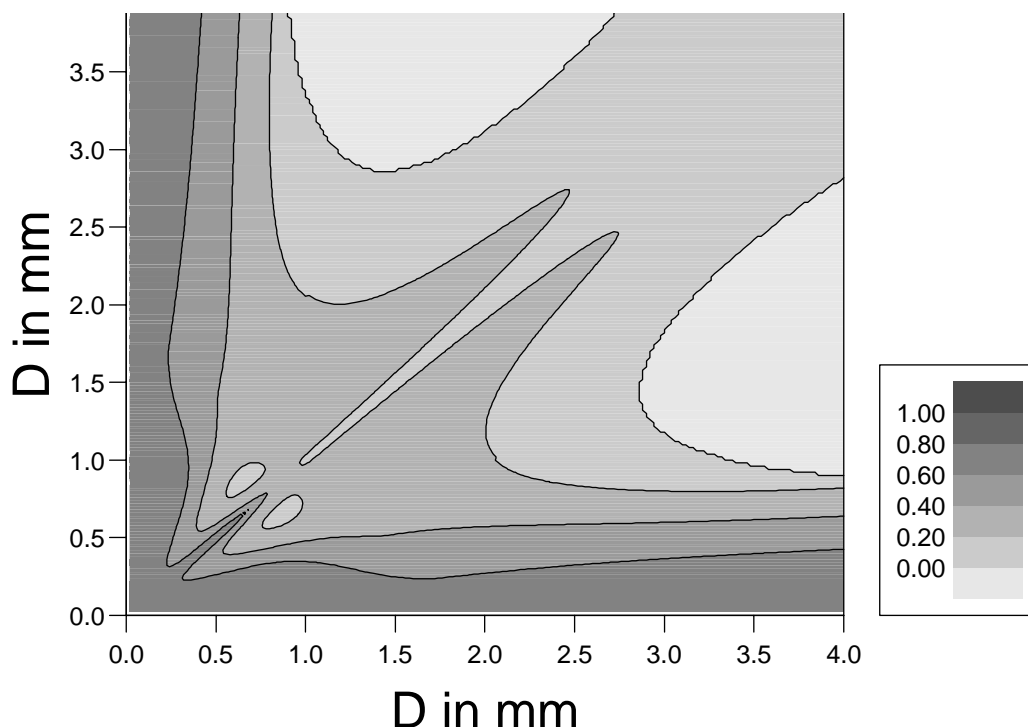


Abbildung 2.8: Koaleszenzeffizienz E_{koal} von Wassertropfen nach Low und List (1982) und Beard und Ochs (1995) als Funktion der Tropfendurchmesser D in mm.

2.2.4 Koagulationseigenschaften von Eispartikeln

Die Koagulationseigenschaften von Eispartikeln sind auf Grund ihrer Formenvielfalt und ihrer komplizierten Geometrien noch immer nicht befriedigend geklärt. Wang und Ji (2000) haben die Kollisionseffizienzen zwischen idealisierten Eispartikeln und kleinen Tropfen durch numerische Simulation auf der Basis der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung untersucht. In Abbildung 2.9 ist die Kollisionseffizienz dargestellt, wie sie von Wang und Ji (2000) unter der Annahme von Eiskristallen in Form von hexagonalen Plättchen berechnet wurde. Sind die Eiskristalle kleiner als ein bestimmter Schwellenwert, der für hexagonale Plättchen bei ca. $D_i \approx 120 \mu\text{m}$ liegt, so können sie keine Tropfen einfangen. Dies bestätigen Messungen in Mischwolken (Reinking, 1979; Bruintjes et al., 1987). Hexagonale Plättchen können auch keine großen Tropfen ($R > 100 \mu\text{m}$) einfangen. Ist die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen hingegen größer als die der hexagonalen Plättchen, so sind Kollisionen möglich. Diese Kollisionswechselwirkung sehr großer und damit schnell fallender Regentropfen mit Eiskristallen wird von Lew und Pruppacher (1983) und Lew et al. (1985) behandelt (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 607-608). Diese Arbeiten zeigen, dass Regentropfen Eiskristalle ab

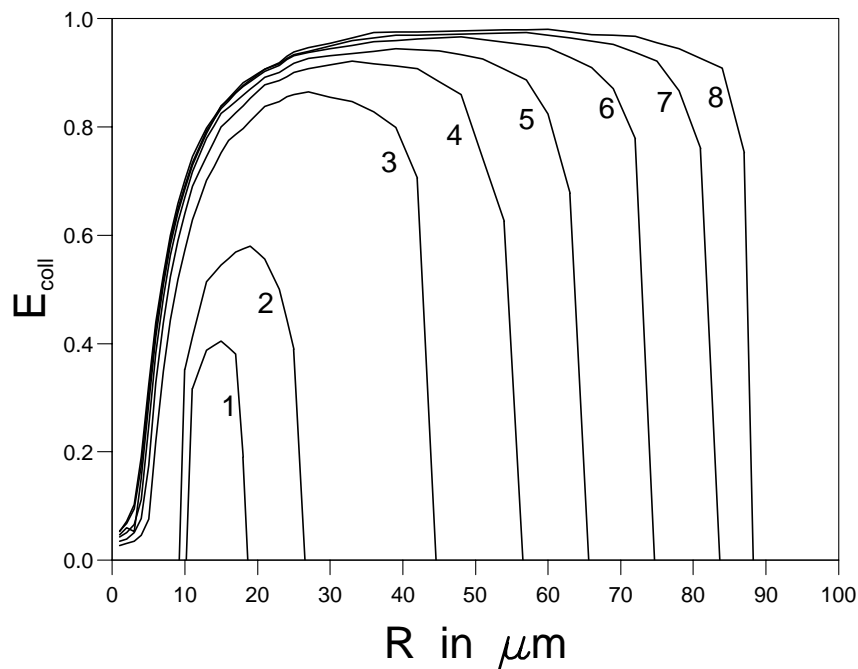


Abbildung 2.9: Kollisionseffizienz der Wechselwirkung Eiskristalle-Wassertropfen nach Wang und Ji (2000) als Funktion des Tropfenradius R in μm für verschiedene Eiskristalldurchmesser: (1) $D_i = 120 \mu\text{m}$, (2) $D_i = 140 \mu\text{m}$, (3) $D_i = 275 \mu\text{m}$, (4) $D_i = 390 \mu\text{m}$, (5) $D_i = 490 \mu\text{m}$, (6) $D_i = 625 \mu\text{m}$, (7) $D_i = 775 \mu\text{m}$, (8) $D_i = 875 \mu\text{m}$.

einem Durchmesser von ca. $100 \mu\text{m}$ mit hoher Effizienz einfangen. Für kleinere Eiskristalle hängt die Kollisionseffizienz von Temperatur und Druck sowie der Form der Eiskristalle ab.

Die Graupelbildung durch das Bereifen von Eiskristallen wurde bereits von Beheng (1976, 1978) numerisch simuliert. Dabei wurde angenommen, dass die Kollisionseffizienz der Graupelpartikel gleich der von Wassertropfen ist. Khain et al. (2001) zeigen jedoch, dass sich Graupelpartikel auf Grund des anderen Fallgeschwindigkeits-Größen-Verhältnisses nicht exakt wie gleich große Tropfen verhalten. Pinsky und Khain (1998) sowie Pinsky et al. (1998) diskutieren auch den Einfluss der Turbulenz auf die Kollisionswechselwirkung von Eispartikeln. Diese Effekte werden im weiteren jedoch vernachlässigt.

Die Aggregation von Eispartikeln zu mehr oder weniger großen Schneeflocken wirft neben dem Kollisionsproblem noch das Problem auf, wann Eispartikel aneinander haften und es zu einer stabilen Vereinigung kommt. Dieses Problem ist ebenfalls weitgehend ungeklärt (Pruppacher und Klett, 1997; S. 691). Häufig werden entweder verschiedene konstante Aggregationseffizienzen für die Kollisionswechselwirkungen zwischen den Eispartikelklassen

Tabelle 2.3: Mittlere Koagulations- bzw. Aggregationseffizienzen für verschiedene Wechselwirkungen nach Reisner et al. (1998).

Wechselwirkung	Produkt	Effizienz
Graupel-Graupel	-	0.000
Graupel-Schnee	Graupel	0.001
Graupel-Wolkeneis	Graupel	0.05
Graupel-Wolkentropfen	Graupel	1.0
Graupel-Regen	Graupel	1.0
Schnee-Schnee	Schnee	0.1
Schnee-Wolkeneis	Schnee	1.0
Schnee-Wolkentropfen	Schnee oder Graupel	1.0
Schnee-Regen	Schnee oder Graupel	1.0
Wolkeneis-Wolkeneis	Schnee	0.1
Wolkeneis-Wolkentropfen	Wolkeneis oder Graupel	variabel
Wolkeneis-Regen	Graupel	1.0

angenommen - in Tabelle 2.3 sind als Beispiel die Werte nach Reisner et al. (1998) aufgeführt - oder einfache Temperaturabhängigkeiten. Lin et al. (1983) orientieren sich an den Messungen von Hosler (1957), Hosler und Hallgren (1961) und Passarelli (1978) und verwenden z.B. für die Wolkeneis-Wolkeneis- (Index *ii*) und die Wolkeneis-Schnee-Wechselwirkung (Index *is*) die mittlere Anhafteffizienz ('sticking efficiency')

$$\bar{E}_{\text{stick},ii}(T) = \bar{E}_{\text{stick},si}(T) = \exp[0.025(T - T_3)] \quad (2.93)$$

($T_3 = 273.16$ K ist die Temperatur am Tripelpunkt von Wasser) und für die Graupel-Schnee- (Index *gs*) und Schnee-Schnee-Wechselwirkung (Index *ss*)

$$\bar{E}_{\text{stick},ss}(T) = \bar{E}_{\text{stick},gs}(T) = \min(\exp[0.09(T - T_3)], 1). \quad (2.94)$$

Für die Graupel-Wolkeneis-Wechselwirkung (Index *gi*) postulieren Lin et al. (1983) hingegen

$$\bar{E}_{\text{stick},gi}(T) = \begin{cases} 0.1, & \text{für } T \leq T_3 \\ 1.0, & \text{für } T > T_3. \end{cases} \quad (2.95)$$

Cotton et al. (1986) verwenden auf der Basis der Daten von Hallgren und Hosler (1960)

eine andere Parametrisierung für die Wolkeneis-Wolkeneis-Wechselwirkung

$$\bar{E}_{\text{stick},ii}(T) = \min [10^{0.035(T-T_3)-0.7}, 0.2] . \quad (2.96)$$

Straka (1989) orientiert sich sowohl an Cotton et al. (1986) als auch an Lin et al. (1983) und benutzt die folgenden Anhafteffizienzen:

$$\bar{E}_{\text{stick},ii}(T) = \min [10^{0.035(T-T_3)-0.7}, 0.2] , \quad (2.97)$$

$$\bar{E}_{\text{stick},si}(T) = \exp[0.09 (T - T_3)] , \quad (2.98)$$

$$\bar{E}_{\text{stick},gi}(T) = \exp[0.38 (T - T_3)] , \quad (2.99)$$

$$\bar{E}_{\text{stick},gs}(T) = \exp[0.09 (T - T_3)] . \quad (2.100)$$

Ferrier et al. (1994) schlagen die Parametrisierungen

$$\bar{E}_{\text{stick},ii}(T) = 0.005 \exp[0.1 (T - T_3)] , \quad (2.101)$$

$$\bar{E}_{\text{stick},si}(T) = 0.05 \exp[0.1 (T - T_3)] , \quad (2.102)$$

$$\bar{E}_{\text{stick},gs}(T) = \bar{E}_{\text{stick},gi}(T) = 0.01 \exp[0.1 (T - T_3)] \quad (2.103)$$

vor, allerdings ohne die Datenbasis anzugeben. Offensichtlich besteht bei diesen temperaturabhängigen Aggregationseffizienzen eine große Unsicherheit (Khain et al., 2000). Hier wären verlässliche Laboruntersuchungen oder in-situ Messungen notwendig.

Die mittlere Aggregationseffizienz ist dann das Produkt aus Kollisionseffizienz und Anhafteffizienz:

$$\bar{E}(\bar{D}_x, \bar{D}_y, T) = \bar{E}_{\text{koll}}(\bar{D}_x, \bar{D}_y) \bar{E}_{\text{stick}}(T) \quad (2.104)$$

mit den mittleren Teilchendurchmessern \bar{D}_x und \bar{D}_y . Bis auf wenige Ausnahmen wird allerdings durchweg $\bar{E}_{\text{koll}} \equiv 1$ angenommen (vgl. Abschnitt 4.2.11).

2.3 Theoretische Formulierung der wolkenmikrophysikalischen Vorgänge

Zur theoretischen Beschreibung wolkenmikrophysikalischer Prozesse sind verschiedene mathematische Modelle denkbar. Das vielleicht detaillierteste Modell wäre die explizite Beschreibung jedes einzelnen Partikels durch Ort, Impuls und Masse. Derartige Modelle sind auf Grund der Vielzahl der zu betrachtenden Partikel nur für spezielle, grundlegende Fragen anwendbar (z.B. Trizac und Hansen, 1996). Die in der Wolkenphysik übliche theoretische Formulierung mittels Verteilungs- bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen geht auf von Smoluchowski (1916, 1917) und Müller (1928) zurück und wurde ursprünglich zur Beschreibung kolloidaler Lösungen entwickelt. Ein dritte physikalische Betrachtungsweise ergibt sich aus der Beschränkung auf integrale Größen der Verteilungsfunktion (sog. Momente); diese Methode wird in der Wolkenphysik üblicherweise als Parametrisierung bezeichnet.

Im folgenden werden kurz die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse auf der Basis von Verteilungsfunktionen erläutert. Die parametrische Beschreibung ist ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit und wird ausführlich in den Kapiteln 3 und 4 diskutiert.

2.3.1 Spektrale Formulierung der Koagulation

Basierend auf den Arbeiten von von Smoluchowski (1916, 1917) und Müller (1928) kann eine spektrale Theorie für die Anzahldichte von Hydrometeoren formuliert werden. Dabei gibt die Funktion $f(x, \mathbf{r}, t)dx$ die Anzahldichte der Partikel im Massenintervall $[x, x + dx]$ an; sie wird auch Anzahldichteverteilungsfunktion (bzgl. der Masse) genannt. Die die Hydrometeore charakterisierende Größenvariable - hier die Masse - heißt innere Koordinate. Anstatt der Masse kann auch jede andere Eigenschaft der Partikel, die eine eindeutige Funktion der Masse ist, als innere Koordinate verwendet werden. Insbesondere bei irregulär geformten Hydrometeoren erweist sich jedoch die Verwendung der Masse als innere Koordinate als sinnvoll. Die raum-zeitliche Änderung der Anzahldichteverteilungsfunktion wird durch die spektrale Bilanzgleichung im vierdimensionalen \mathbf{r} - x -Raum erfasst

$$\frac{\partial f(x, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)f(x, \mathbf{r}, t)] + \nabla \cdot [\mathbf{v}'(x, \mathbf{r}, t)f(x, \mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial x}[\dot{x}f(x, \mathbf{r}, t)] = \sigma. \quad (2.105)$$

In dieser Gleichung ist $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Gesamtsystems und $\mathbf{v}'(x, \mathbf{r}, t)$ ist die Diffusionsgeschwindigkeit der Hydrometeore. Der dritte Term der linken

Seite ist die Divergenz des Flusses entlang der inneren Koordinate und beschreibt ein kontinuierliches Wachstum der Partikel (z.B. durch Kondensation) mit einer Wachstumsrate $\dot{x} = dx/dt$. Die rechte Seite gibt die Änderungsrate von $f(x, \mathbf{r}, t)$ auf Grund anderer wolkenmikrophysikalischer Prozesse an z.B. durch die Stoßwechselwirkungen der Hydrometeore. Unter der Annahme, dass die Diffusionsgeschwindigkeit der Hydrometeore gleich der nur von der inneren Koordinate abhängigen Sedimentationsgeschwindigkeit ist, ergibt sich (siehe z.B. Beheng und Wacker, 1993):

$$\frac{\partial f(x, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)f(x, \mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial z}[v_s(x)f(x, \mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial x}[\dot{x}f(x, \mathbf{r}, t)] = \sigma. \quad (2.106)$$

Werden als wolkenmikrophysikalische Quellterme nur Zweierstöße von Hydrometeoren betrachtet, so kann die rechte Seite durch

$$\sigma_{koag} = \frac{1}{2} \int_0^x f(x-x', \mathbf{r}, t) f(x', \mathbf{r}, t) K(x-x', x') dx' - \int_0^\infty f(x, \mathbf{r}, t) f(x', \mathbf{r}, t) K(x, x') dx' \quad (2.107)$$

spezifiziert werden, die in dieser Integraldarstellung zum ersten Mal von Müller (1928) formuliert wurde. Dabei ist $K(x, y)$ die Koagulationsfunktion (auch Koagulationskern, engl.: coagulation kernel) zweier Partikel mit den Massen x und y , die für die Schwerekoagulation durch

$$K(x, y) = \pi[r(x) + r(y)]^2 E_{koag}(x, y) |v(x) - v(y)| \quad (2.108)$$

gegeben ist. Die Koagulationsfunktion ist symmetrisch in ihren Argumenten und positiv semi-definit. Der erste Term der rechten Seite der Gleichung (2.107) beschreibt den Gewinn von Partikeln der Masse x auf Grund der Koagulation von zwei Partikeln der Massen $x-x'$ und x' , der zweite Term beschreibt den Verlust durch Koagulation von Partikeln der Masse x mit Partikeln beliebiger Masse.

Eine Diskussion verschiedener Herleitungen dieser Gleichung findet man z.B. bei Drake (1972). Die Anzahldichteverteilungsfunktion muss dabei in jedem Fall in einem statistischen Sinne, d.h. als Mittelwert einer Zufallsvariablen, interpretiert werden. Dies wird ausführlich von Gillespie (1972, 1975) diskutiert (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 622ff. sowie Drake, 1972). Voraussetzung für die Gültigkeit von Gl. (2.107) ist unter anderem ein gut durchmischtes Volumen und eine hinreichend hohe Anzahldichte. Bei einer sehr geringen

Anzahldichte bzw. wenn Partikelkorrelationen auftreten, wie sie auf Grund der Koagulation selbst oder auch durch die kleinräumige atmosphärische Turbulenz entstehen können, kann es zu Abweichungen der wahren Entwicklung des Partikelensembles von der durch Gl. (2.107) beschriebenen Entwicklung kommen (Bayewitz et al., 1974; Valioulis und List, 1984). Inwieweit die Entwicklung einer realen Wolke durch Gl. (2.107) beschrieben werden kann, ist demnach keineswegs endgültig geklärt. In den meisten Fällen kann aber angenommen werden, dass diese Gleichung zumindest eine gute Approximation ist.

Die mathematischen Eigenschaften der kinetischen Koagulationsgleichung, die auch als Smoluchowskische Koagulationsgleichung oder stochastische bzw. quasi-stochastische Koagulationsgleichung bekannt ist, wie z.B. die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung werden von Drake (1972), Ernst (1985) und Aldous (1999) diskutiert. Analytische Lösungen sind nur für wenige Spezialfälle bekannt, so z.B. für den Fall einer konstanten Koagulationsfunktion $K(x, y) = \text{const.}$ (von Smoluchowski, 1917), einer linearen Koagulationsfunktion $K(x, y) = x + y$ (Golovin, 1963) sowie für $K(x, y) = xy$ (siehe z.B. Drake, 1972; Ernst, 1985). Das asymptotische Verhalten wird z.B. von da Costa (1996) diskutiert.

Die Smoluchowskische Koagulationsgleichung beschreibt beliebige Aggregationsprozesse und wird dementsprechend auch auf die verschiedensten Systeme angewandt. Einige Beispiele neben der Aerosol- und Wolkenphysik (Drake, 1972; Pruppacher und Klett, 1997) sind die Polymerisation (Ernst, 1983), die Aggregation von Gasblasen in Flüssigkeiten (Stewart et al., 1993), die Bildung von Planeten oder Galaxien (Silk und White, 1978; Silk und Takahashi, 1979; Allen und Bastien, 1995; Wetherill, 1990) und das Wachstum von Algen (Ackleh et al., 1984). Mehr mathematisch orientiert sind die Fragestellungen der Populationsgenetik (Tavare, 1984) und der Graphentheorie (Bollobas, 1985).

2.3.2 Spektrale Formulierung von Koagulation und Breakup

Berücksichtigt man neben der Koagulation bzw. Koaleszenz auch das kollisionsinduzierte Zerplatzen von Tropfen, so tritt in der Bilanzgleichung ein zusätzlicher Quellterm auf:

$$\frac{\partial f(x, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)f(x, \mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial z}[v_s(x)f(x, \mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial x}[\dot{x}f(x, \mathbf{r}, t)] = \sigma_{koag} + \sigma_{break} \quad (2.109)$$

dabei ist σ_{koag} durch Gl. (2.107) gegeben, in der nur die 'erfolgreichen' Kollisionen berücksichtigt werden, d.h. solche Kollisionen, die zu einer stabilen Koaleszenz führen. Der zweite

Quellterm σ_{break} beschreibt den Anteil der Kollisionen, die zu einem kollisionsinduzierten Zerplatzen führen. Diesen Term schreibt man meist in der Form (siehe z.B. Hu und Srivastava, 1995):

$$\sigma_{break} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^x f(x', \mathbf{r}, t) f(x'', \mathbf{r}, t) B(x', x'') P(x; x', x'') dx' dx'' - \int_0^{\infty} f(x, \mathbf{r}, t) f(x', \mathbf{r}, t) B(x, x') dx'. \quad (2.110)$$

Dabei ist $B(x, y)$ die so genannte Breakup-Funktion, die im Gegensatz zur Koagulationsfunktion $K(x, y)$ den Anteil der Kollisionen angibt, die nicht zur stabilen Koaleszenz führen. Die Breakup-Funktion ist demnach durch

$$B(x, y) = K(x, y) \frac{E_{break}(x, y)}{E_{koal}(x, y)} \quad \text{mit} \quad E_{break}(x, y) = 1 - E_{koal}(x, y)$$

gegeben. Die Bruchstückverteilungsfunktion $P(x; x', x'')$ ist so definiert, dass $P(x; x', x'') dx$ die mittlere Anzahl von Tropfen im Massenintervall $[x, x+dx]$ angibt, die bei einem kollisionsinduzierten Breakup-Vorgang von Tropfen der Massen x' und x'' entstehen. Der Gewinnterm in Gl. (2.110) beschreibt also die Bildung von Tropfen der Masse x durch einen Breakup-Vorgang der Tropfen x' und x'' , während der Verlustterm die Anzahländerung von Tropfen mit Masse x durch Zerplatzen angibt. Offensichtlich muss auf Grund der Massenerhaltung $P(x; x', x'')$ die Beziehungen

$$P(x; x', x'') = 0, \quad \text{für} \quad x \geq x' + x'' \quad (2.111)$$

und

$$\int_0^{x'+x''} x P(x; x', x'') dx = x' + x'' \quad (2.112)$$

erfüllen. Eine Parametrisierung der Bruchstückverteilungsfunktion $P(x; x', x'')$, die bislang nur aus Messungen abgeleitet werden kann, wird von Low und List (1982a, 1982b) angegeben (siehe auch Mayer, 2000).

2.3.3 Spektrale Formulierung der Kollisionsprozesse in Mischwolken

Um die Mikrophysik von Mischwolken zu beschreiben, führt z.B. Beheng (1976, 1978) zusätzliche Anzahldichteverteilungen ein, die sich auf Eis- und Graupelpartikel beziehen. Für jede dieser Verteilungsfunktionen ist dann eine entsprechende Bilanzgleichung zu formulieren. Die Kollisionswechselwirkungen führen auf eine Vielzahl von Integraltermen. Neben der Anzahldichteverteilungsfunktion der Tropfen $f_w(x, t)$ verwendet Beheng (1976, 1978) die Funktionen $f_i(x, t)$ für unbereifte Eiskristalle und $f_g(x, t)$ für Graupel. Die zeitliche Entwicklung dieser Verteilungsfunktionen auf Grund der Kollisionswechselwirkungen zwischen den Hydrometeoren wird dann durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_w(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^x f_w(x-x', t) f_w(x', t) K_{ww}(x-x', x') dx' \\
 & - \int_0^\infty f_w(x, t) f_w(x', t) K_{ww}(x, x') dx' \\
 & - \int_0^\infty f_w(x, t) f_i(x', t) K_{iw}(x, x') dx' \\
 & - \int_0^\infty f_w(x, t) f_g(x', t) K_{gw}(x, x') dx' \quad (2.113)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_g(x, t)}{\partial t} = & \int_0^x f_i(x-x', t) f_w(x', t) K_{iw}(x-x', x') dx' \\
 & + \int_0^x f_g(x-x', t) f_w(x', t) K_{gw}(x-x', x') dx' \\
 & - \int_0^\infty f_g(x, t) f_w(x', t) K_{gw}(x, x') dx' \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_i(x, t)}{\partial t} = - \int_0^\infty f_i(x, t) f_w(x', t) K_{iw}(x, x') dx' \quad (2.115)$$

bestimmt (ohne den spontanen Breakup von Tropfen). Die Gewinn- und Verlustterme sind analog zu Gleichung (2.107) zu interpretieren. Damit berücksichtigt Beheng jedoch nur die

Kollisionswechselwirkungen, die wesentlich zur Graupelbildung beitragen. Die Aggregation der Eiskristalle wird vernachlässigt.

Noch umfassendere spektrale Mischwolkenmodelle, die dann auch die räumliche Dynamik sowie weitere wolkenmikrophysikalische Prozesse wie z.B. die Nukleation berücksichtigen, sind z.B. die von Hall (1980), Khain und Sednev (1995, 1996), Khain et al. (1999), Khain et al. (2001) sowie Ovtchinnikov und Kogan (2000) und Ovtchinnikov et al. (2000). Hall (1980) verwendet dabei nur eine zusätzliche Anzahldichteverteilungsfunktion für Eispartikel, wobei die kleinen Partikel als Eiskristalle betrachtet werden, die großen jedoch als Graupel. Khain et al. (2000) dokumentieren den Stand der Entwicklung in diesem Bereich der Wolkenmodellierung.

2.4 Klassifikation und Simulation konvektiver Systeme

Die Vorhersage von Gewittern, ihrer Entstehung, Entwicklung und Zugbahn ist auch heute noch sehr problematisch. Betrachtet man die Gefahren und das Schadenspotential derartiger Ereignisse - insbesondere, wenn es zu starken Hagelschauern kommt oder sich Tornados ausbilden - so ist es evident, dass die Simulation derartiger Phänomene eine wichtige Aufgabe der Meteorologie ist. Dabei können Simulationen, die auf numerischen Modellen basieren, nicht nur die direkte Vorhersage verbessern, sondern insbesondere auch zum besseren Verständnis der atmosphärischen Prozesse beitragen.

Hochreichende konvektive Systeme werden oft wie folgt klassifiziert (Browning, 1964; Marwitz, 1972a,b,c; Browning, 1977; auch Bluestein, 1992; Emanuel, 1994):

- **Gewöhnliche Einzelzellen:** Bei geringer vertikaler Windscherung und niedrigen Windgeschwindigkeiten entstehende Cumuli, die nach 30-60 Minuten schauerartigen Niederschlag bilden und sich dann rasch auflösen. Obwohl diese konvektiven Zellen sowohl hohe Vertikalwindgeschwindigkeiten als auch eine große vertikale Erstreckung erreichen können, ist ihre Lebensdauer begrenzt. Hierbei spielen zwei Mechanismen eine Rolle: Auf Grund der geringen vertikalen Windscherung fällt der Niederschlag direkt in den Aufwindbereich, was zu einem Rückgang der Vertikalwindgeschwindigkeiten führt und so die Dynamik der konvektiven Zelle zerstört. Gleichzeitig entsteht durch die Verdunstung des Niederschlags unterhalb der Wolkenuntergrenze Kaltluft, die sich in der Grenzschicht in Form der so genannten Böenfront ausbreitet und dadurch die Einzelzelle von dem Nachschub an warmer, feuchter Luft abschneidet, der notwendig wäre, um den Auftrieb dauerhaft zu erhalten (Byers und Braham, 1949).
- **Multizellen:** Als Multizellen werden Systeme von gewöhnlichen Einzelzellen bezeichnet, die in rascher zeitlicher Folge nacheinander oder in Gruppen auftreten. Sie entstehen dadurch, dass die Böenfront einer gewöhnlichen Einzelzelle in der Umgebung der Primärzelle wiederum Konvektion auslösen kann. Diese sekundären Einzelzellen erzeugen dann neue Böenfronten, wodurch sich das Multizellensystem rasch vergrößern und ausbreiten kann.
- **Superzellen:** Bei starker vertikaler Windscherung kann es zur Ausbildung sehr langlebiger rotierender konvektiver Zellen kommen. Diese werden nach Browning (1964) als Superzellen bezeichnet. Superzellen werden durch ein einzelnes, quasi-stationäres Aufwindgebiet angetrieben und können über mehrere Stunden stabil sein. Ihre Zug-

bahn weist im Gegensatz zu gewöhnlichen Einzelzellen eine Komponente senkrecht zum mittleren Wind auf. Die Dynamik der Superzelle wird im Gegensatz zur gewöhnlichen Einzelzelle nicht nur durch die potentielle Energie gespeist, sondern auch durch die kinetische Energie des Grundstroms.

Die Klassifikation konvektiver Systeme anhand von Beobachtungen ist jedoch nicht immer eindeutig, da meist keine räumlich und zeitlich hochaufgelösten Daten über die dynamische Struktur vorliegen. Untersuchungen von einzelnen konvektiven Systemen im Südwesten Deutschlands auf der Basis von Radarmessungen findet man bei Hannesen (1998). Hannesen et al. (1998) untersuchen insbesondere eine Superzelle, die am 9. September 1995 im Oberrheingraben zur Ausbildung eines schwachen Tornados führte.

Den Durchbruch in der Simulation der Dynamik derartiger hochreichender konvektiver Systeme erreichten Schlesinger (1975) und insbesondere Klemp und Wilhelmson (1978) mit dreidimensionalen Atmosphärenmodellen. Diese Modelle sind in der Lage, sowohl die Dynamik als auch die Wolkenmikrophysik zu beschreiben. Klemp et al. (1981) gelang die erste Simulation von Superzellen.

Weisman und Klemp (1982) untersuchen den Einfluss der atmosphärischen Bedingungen auf die Entwicklung hochreichender konvektiver Systeme. Die beiden wichtigsten atmosphärischen Parameter sind dabei die vertikale Windscherung und die konvektiv verfügbare potentielle Energie ('convective available potential energie' = CAPE), die durch

$$\text{CAPE} = g \int_{\text{NFK}}^{\text{NOA}} \frac{\theta_{v,p} - \theta_v}{\theta_v} dz \quad (2.116)$$

definiert ist, wobei $\theta_{v,p}$ die virtuell potentielle Temperatur eines aufsteigenden Luftpakets ist (NFK = Niveau freier Konvektion, NOA = Niveau ohne Auftrieb). Dabei identifizieren sie die von Moncrieff und Green (1972) eingeführte integrale Richardson-Zahl

$$\text{Ri} = \frac{\text{CAPE}}{\frac{1}{2}(\Delta \bar{u}_s)^2}, \quad (2.117)$$

d.h. das Verhältnis aus CAPE und kinetischer Energie der Windscherung (zur Definition von $\Delta \bar{u}_s$ siehe Abschnitt 5.2), als einen dimensionslosen Parameter, der die Entwicklung der konvektiven Systeme maßgeblich bestimmt. Nach Weisman und Klemp (1982) bilden sich im Bereich $\text{Ri} = 10 - 45$ bevorzugt Superzellen, während für größere Richardson-Zahlen Einzel- und Multizellengewitter auftreten. Für kleinere Richardson-Zahlen verhindert die starke Windscherung die Ausbildung hochreichender Konvektion. Der Einfluss der Richtungsscherung des Grundstroms untersuchen Weisman und Klemp (1984). Im Gegensatz

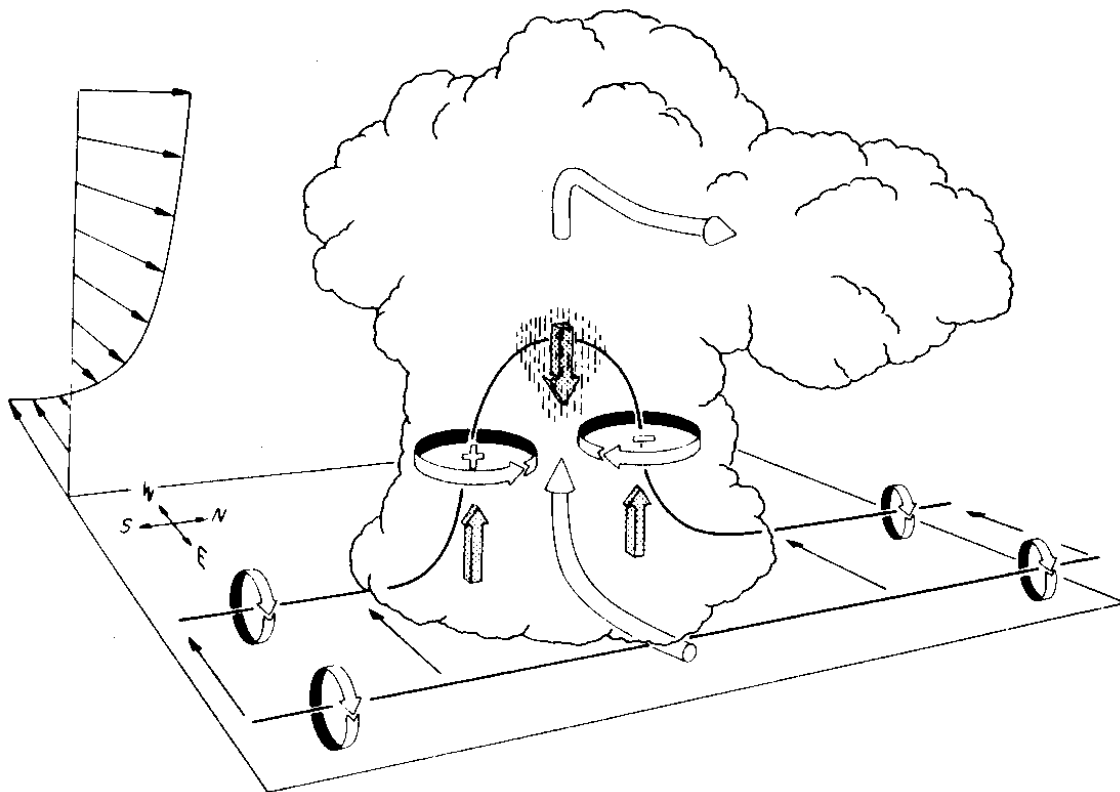


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung des ersten Entwicklungsstadiums der Superzellenentstehung bei reiner Geschwindigkeitsscherung des Grundstroms: Horizontale Vorticity des Grundstroms wird durch den Aufwind in vertikale Vorticity umgewandelt. In der mittleren Troposphäre bildet sich ein Dipolfeld vertikaler Vorticity (aus Klemp, 1987).

zu Weisman und Klemp (1982) zeigen McCaul und Weisman (2001), dass auch bei gleicher Richardson-Zahl unterschiedliche Entwicklungen auf Grund unterschiedlicher Temperatur- und Feuchteprofile möglich sind.

Auf der Basis derartiger numerischer Simulationen und zahlreicher Beobachtungen konnte eine konzeptionelle Vorstellung der Struktur und der Dynamik von Superzellen entwickelt werden (Rotunno, 1981; Rotunno und Klemp, 1982, 1985; Klemp, 1987). Entscheidend für die lange Lebensdauer der Superzellen ist die Ausbildung einer rotierenden Strömung. Voraussetzung hierfür ist eine vertikale Geschwindigkeitsscherung des Grundstroms. Durch den Aufwind wird dann horizontale Vorticity des Grundstroms in vertikale Vorticity umgewandelt (gedreht). Dieser Prozess ist schematisch in Abb. 2.10 dargestellt. Charakteristisch hierfür ist die Ausbildung eines Vorticitydipols in der mittleren Troposphäre (sog. 'steering level', ca. 4500 m Höhe). In der weiteren Entwicklung dieser primären konvektiven Zelle kommt es

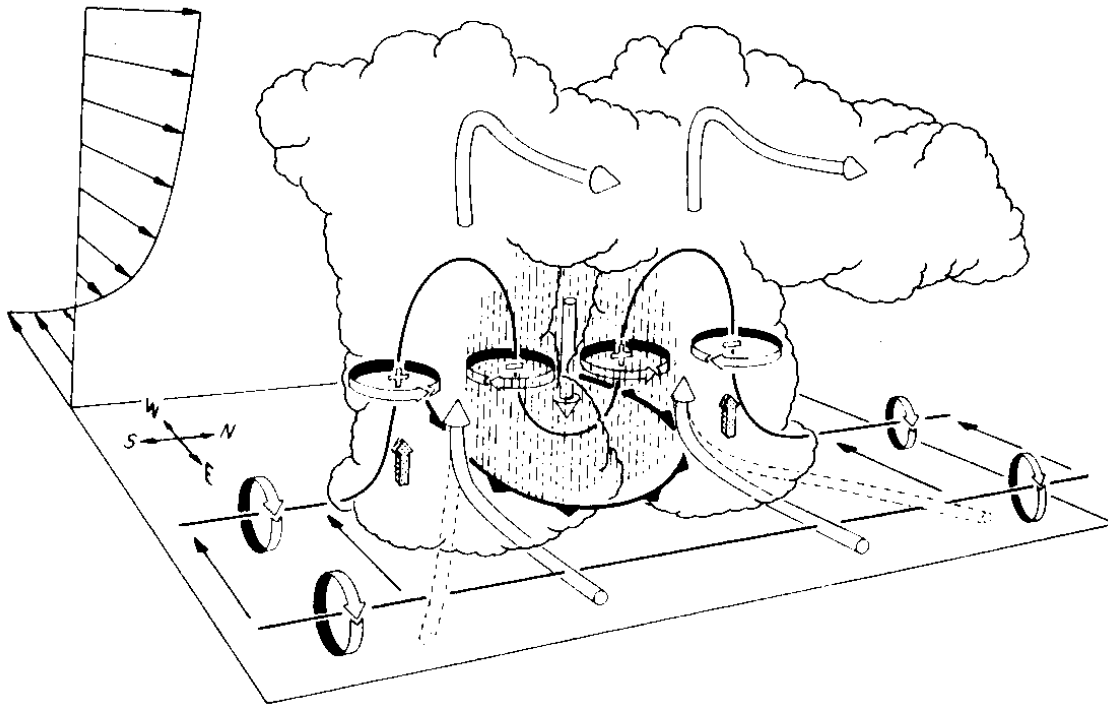


Abbildung 2.11: Schematische Darstellung des Splittingstadiums der Superzellenentstehung bei reiner Geschwindigkeitsscherung des Grundstroms: Durch den auf Grund des gebildeten Niederschlags entstehenden Abwind wird die zentrale Wirbelröhre nach unten gebogen, wodurch sich zwei getrennte Vorticitydipole ausbilden. Dies führt zu einer Teilung der Struktur und zur Entstehung zweier antisymmetrischer Superzellen (aus Klemp, 1987).

zur Bildung von Niederschlag und es entsteht ein Abwindgebiet, das die zentrale Wirbelröhre nach unten biegt und dadurch den anfänglichen Vorticitydipol aufspaltet (Abb. 2.11). Es entstehen zwei getrennte Vorticitydipole und damit zwei antisymmetrische Superzellen, wobei in der rechten Superzelle die zyklonale und in der linken Superzelle die antizyklonale Rotation dominiert. Die in Abbildung 2.12 gezeigte Skizze gibt eine schematische Darstellung der Phänomenologie einer voll ausgebildeten Superzelle. Die gebogene Form des Radarechos wird meist als Hakenecho ('hook echo') bezeichnet und entsteht auf Grund der rotierenden Strömung (sog. Mesozyklone). Einen Überblick über Beobachtungen von Superzellen und ihrer Phänomenologie findet man bei Markowski (2002) und auch bei Houze (1993). Die Theorie der Strömungsdynamik unter besonderer Berücksichtigung der Helizität behandeln Davies-Jones (1984) sowie Lilly (1986a) und Lilly (1986b), wobei Lilly (1986a,1986b) sich

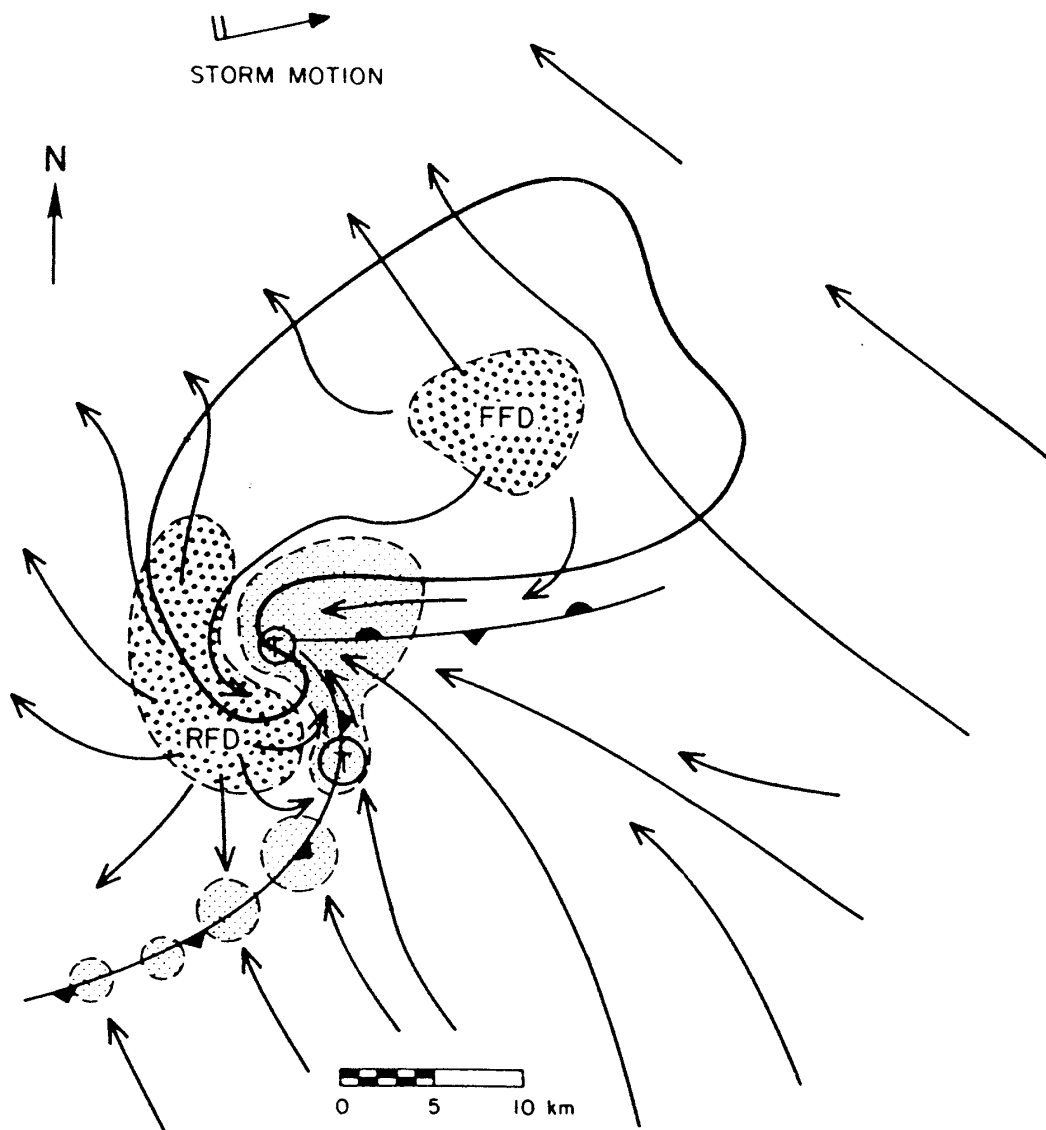


Abbildung 2.12: Schematische Darstellung eines bodennahen Horizontalschnittes durch eine Superzelle. Die durchgezogene dicke Linie entspricht dem Radarecho, die Pfeile geben das bodennahe Windfeld wieder und die Kaltfront-Symbole grenzen die ausströmende Kaltluft von der einströmenden Warmluft ab. Die Abwindgebiete sind durch gepunktete Flächen mit gestrichelter Umrandung gekennzeichnet (FFD: vorderseitiges Abwindgebiet, RFD: rückseitiges Abwindgebiet). Die Lage des Aufwindgebietes ist ebenfalls durch eine gestrichelte Linie umfasst und schwach gepunktet. In Kreise eingeschlossene T-Symbole geben die Position möglicher Tornados an. Der mit 'storm motion' bezeichnete Vektor gibt die Bewegungsrichtung der Zelle an (nach Lemon und Doswell, 1979).

auch ausführlich Fragen der Energetik widmet. Inwieweit eine Strömungstheorie auf der Basis linearisierter dynamischer Gleichungen ausreicht, um die Dynamik der Superzellen zu behandeln, diskutieren Weisman und Rotunno (2000).

Die ersten Simulationen von Klemp und Wilhelmson (1978) und auch spätere Arbeiten, die sich vor allem der Dynamik widmen, beschreiben die wolkenmikrophysikalischen Prozesse jedoch nur in sehr einfacher, eingeschränkter Art und Weise: Meist werden nur Wolken- und Regentropfen berücksichtigt, deren Entwicklung durch das so genannte Kessler-Schema beschrieben wird (siehe auch Abschnitt 3.2). Lin et al. (1983) erweiterten dieses Schema um Eis-, Schnee- und Graupelpartikel (siehe auch Abschnitt 4.1). Simulationen von Superzellen und Hagelgewittern auf der Basis dieses Wolkenschemas durch Straka (1989), Straka und Anderson (1993) sowie Houze et al. (1993) zeigen eine gute Übereinstimmung mit Beobachtungen.

Basierend auf den in-situ Messungen von Musil et al. (1991) und den Modellergebnissen von Straka und Anderson (1993) und Johnson et al. (1993) können die Eigenschaften von starken Hagelgewittern wie folgt zusammengefasst werden:

- Die maximalen Aufwindgeschwindigkeiten erreichen typischerweise $20\text{-}40\text{ m s}^{-1}$, wobei auch Maxima von über 50 m s^{-1} auftreten können. Diese Aufwindgebiete treten in $7\text{-}9\text{ km}$ Höhe über Grund auf und haben Durchmesser von $4\text{-}6\text{ km}$.
- Die maximalen Abwindgeschwindigkeiten erreichen bei Hagelereignissen bis zu 20 m s^{-1} . Häufig sind Abwindgeschwindigkeiten von $8\text{-}12\text{ m s}^{-1}$ und Durchmesser der Abwindgebiete von $1\text{-}4\text{ km}$. Die maximalen Abwindgeschwindigkeiten treten in einer Höhe von $1.5\text{-}2\text{ km}$ über Grund auf. Diese starken Abwinde entstehen ca. $10\text{-}15\text{ min}$ nach dem Aufwindmaximum und werden sowohl thermisch durch das Schmelzen der Graupel- bzw. Hagelpartikel sowie das Verdunsten der Regentropfen verursacht als auch mechanisch durch die Reibung der fallenden Partikel ('liquid water drag').
- Die Mischungsverhältnisse erreichen für Wolkenwasser typischerweise $5\text{-}10\text{ g kg}^{-1}$ und für Graupel bzw. Hagel $5\text{-}14\text{ g kg}^{-1}$, wobei am Boden deutlich niedrigere Werte auftreten.
- Die Radarreflektivität nimmt bei Hagelgewittern Werte von $60\text{-}65\text{ dBZ}$ an und wird hauptsächlich durch die Anzahl und Größe der Graupel- bzw. Hagelpartikel bestimmt. Das Reflektivitätsmaximum liegt meist zwischen $4\text{-}6\text{ km}$ über Grund.
- Die vertikale Vorticity erreicht für entwickelte Superzellen ca. 0.02 s^{-1} .

Kapitel 3

Integrale Formulierung der Wolkenmikrophysik.

Teil I: Flüssige Phase

Obwohl die spektrale Theorie sicherlich die adäquate Formulierung der Wolkenmikrophysik ist, da dadurch der polydisperse Charakter des Systems am besten berücksichtigt werden kann, ist es wünschenswert und mitunter notwendig, auch einfachere physikalische Modelle zu entwickeln: Auf Grund des Rechenaufwands kann z.B. in numerischen Wettervorhersagemodellen nur eine sehr vereinfachte Darstellung der Wolkenmikrophysik implementiert werden. Im folgenden wird gezeigt, wie eine vereinfachte Beschreibung der Wolkenmikrophysik formuliert werden kann, die nur integrale Größen der Anzahldichteverteilungsfunktion verwendet. Dabei beschränkt sich dieses Kapitel auf die flüssige Phase; im Mittelpunkt steht ein neues Parametrisierungsschema, das die Behandlung der Koagulationsprozesse von Wolken- und Regentropfen gegenüber bislang üblichen Methoden deutlich verbessern kann.

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition der Momente der Anzahldichteverteilung

Eine Wolke, die aus verschiedenen großen Tropfen besteht, bildet ein polydisperses System. Integrale Eigenschaften dieses polydispersen Systems werden im Allgemeinen durch die Momente der Tropfenanzahldichteverteilungsfunktion $f_w(x)$ beschrieben (z.B. Beheng und Wacker,

1993). Im folgenden werden meist die durch

$$M_w^k = \int_0^{\infty} x^k f_w(x) dx \quad (3.1)$$

definierten k -ten Momente verwendet, die auf die Teilchenmasse bezogen sind. Folglich ist das nullte Moment

$$M_w^0 = \int_0^{\infty} f_w(x) dx \equiv N_w \quad (3.2)$$

die Anzahldichte der Tropfen, die die Anzahl von Tropfen pro Volumeneinheit angibt. Das erste Moment

$$M_w^1 = \int_0^{\infty} x f_w(x) dx \equiv L_w \quad (3.3)$$

ist die Massendichte, die auch als Flüssigwassergehalt bezeichnet wird. Sie ist in der hier gewählten Formulierung identisch mit der Partialdichte des Flüssigwassers, d.h. es gilt $M_w^1 \equiv L_w \equiv \rho_w$.

Das zweite Moment bzgl. der Masse

$$M_w^2 = \int_0^{\infty} x^2 f_w(x) dx = Z_w \quad (3.4)$$

ist proportional zur so genannten Radarreflektivität (siehe Anhang B).

3.1.2 Bilanzgleichung für die Momente der Verteilungsfunktion

Eine Bilanzgleichung für das k -te Moment der Anzahldichteverteilungsfunktion $f_w(x)$ erhält man durch Multiplikation der spektralen Bilanzgleichung (2.106) mit x^k und anschließende Integration in den Grenzen von 0 bis ∞ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_w^k}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) M_w^k(\mathbf{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^{\infty} v_w(x) f_w(x, \mathbf{r}, t) x^k dx \right] \\ = k \int_0^{\infty} f_w(x, \mathbf{r}, t) \dot{x} x^{k-1} dx + \int_0^{\infty} x^k \sigma_w(x, \mathbf{r}, t) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dabei ist $v_w(x)$ die Sedimentationsgeschwindigkeit der Tropfen z.B. nach Gl. (2.82). Der zweite Term der linken Seite dieser Gleichung beschreibt die Divergenz des konvektiven Flusses, der dritte Term die Divergenz des diffusiven Flusses, der hier gleich dem Sedimentationsfluss ist. Der erste Term der rechten Seite beschreibt ein kontinuierliches Wachstum der Tropfen z.B. durch Kondensation. Als Quellterme treten, solange nur Tropfen und kein Eis betrachtet wird, insbesondere die Nukleation und die Koagulation auf, d.h. $\sigma_w = \sigma_{w,Nuk} + \sigma_{w,Koag}$. Der Koagulationsterm $\sigma_{w,Koag}$ kann dann durch die kinetische Gleichung (2.107) spezifiziert werden. Die Parametrisierung der Nukleation wird in Abschnitt 3.7.1 behandelt.

3.1.3 Spezifikation der Phasen- und Diffusionsflüsse im Rahmen der Wolkenmikrophysik

Durch Vergleich der Bilanzgleichung für das erste Moment der Anzahldichteverteilungsfunktion, Gleichung (3.5) mit $k = 1$, mit der Bilanzgleichung für die Partialdichte des Flüssigwassers (2.4) findet man auf Grund der Identität $M_w^1 \equiv L_w \equiv \rho_w$ die im Rahmen der Wolkenmikrophysik konsistente Formulierung der Diffusions- und Phasenflüsse:

$$\mathbf{I}_w = -\mathbf{k} \int_0^{\infty} v_w(x) f_w(x, \mathbf{r}, t) x dx \quad (3.6)$$

$$I_w = \int_0^{\infty} [f_w(x, \mathbf{r}, t) \dot{x} + x \sigma_{w,Nuk}(x, \mathbf{r}, t)] dx. \quad (3.7)$$

Das Integral über den Koagulationsterm ist auf Grund der Massenerhaltung identisch Null, d.h. es gilt

$$\int_0^{\infty} x \sigma_{w,Koag}(x, \mathbf{r}, t) dx \equiv 0. \quad (3.8)$$

3.2 Parametrisierte Wolkenmikrophysik: Grundlegende Begriffe

Das Grundprinzip eines Wolkenmodells, das nur die Massendichten als Modellvariable verwendet, wurde bereits von Kessler (1969) entwickelt. Die vielleicht entscheidende Idee dabei ist, das Tropfenspektrum formal in zwei Größenklassen zu zerlegen: Wolkentropfen, die nur

eine vernachlässigbare Fallgeschwindigkeit besitzen und Regentropfen, deren Fallgeschwindigkeiten mehrere Meter pro Sekunde erreichen können. Die Wolkentropfen verhalten sich damit im Gegensatz zu den Regentropfen ähnlich einem Gas, d.h. sie werden mit dem mittleren Windfeld transportiert und unterliegen der turbulenten Diffusion. Während Kessler (1969) keine Aussage darüber macht, bis zu welcher Größe ein Tropfen als Wolkentropfen zu betrachten bzw. ab welcher Größe ein Tropfen den Regentropfen zuzuordnen ist, kann auf Grund von detaillierten numerischen Simulationen der Koagulation begründet werden, dass der Trennradius zwischen dem Wolken- und Regentropfenbereich einen Wert zwischen 40 und 50 μm hat. So zeigen Berry und Reinhardt (1974a) und auch Beheng und Doms (1990), dass sich, wenn man die Massendichteverteilungsfunktion $g_w(x) = x f_w(x)$ betrachtet, im Laufe des Koagulationsprozesses ein bimodales Spektrum ausbildet. Das Minimum zwischen den beiden Maxima, die den Wolken- bzw. Regentropfen zuzuordnen sind, liegt für die üblicherweise verwendeten empirischen Koagulationsfunktionen stets bei einem Tropfenradius von ca. 40 μm .

Infolge der Größenklassifizierung treten folgende, zuerst von Kessler (1969) formulierte, integrale Koagulationsprozesse auf:

- Die Autokonversion, d.h. die Bildung von Regentropfen durch die Kollision/Koagulation von Wolkentropfen untereinander (siehe Abschnitt 3.2.1).
- Die Akkreszenz, d.h. das Anwachsen der Regentropfen durch die Kollision/Koagulation mit Wolkentropfen.

Kessler (1969) hat sowohl die genannten integralen Koagulationsprozesse, als auch die Sedimentation der Regentropfen, die Nukleation/Kondensation des Wasserdampfes und die Verdunstung der Regentropfen in Abhängigkeit von den Massendichten der Wolken- und Regentropfen L_c und L_r parametrisiert. Dabei ist zu beachten, dass Kessler (1969) für die Nukleation/Kondensation eine Sättigungsadjustierung (siehe Abschnitt 3.7.2) verwendet. Im Rahmen des Kesslerschen Parametrisierungsschemas kann, da als einzige Variablen nur die Massendichten verwendet werden, keine Aussage über einen mittleren Durchmesser der Wolken- oder Regentropfen gemacht werden. Dies erschwert aber die Parametrisierung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse, da diese zum großen Teil eine explizite Größenabhängigkeit besitzen.

Es ist deshalb physikalisch sinnvoll, über das einfache Kesslersche Schema hinauszugehen und neben den Massendichten L_c und L_r auch die Anzahldichten N_c und N_r als Modellvariablen zu verwenden. Ein solcher Parametrisierungsansatz wird dann auch als Zwei-Momenten-

Schema bezeichnet. Zu den bereits aufgeführten Prozessen kommen dann jedoch weitere hinzu. So bewirkt z.B. die Koagulation innerhalb einer Partikelklasse eine Änderung der Anzahldichte, die berücksichtigt und parametrisiert werden muss. Dieser Prozess, der stets zu einer Abnahme der Anzahldichte führt, wird dann auch als Selbsteinfang ('selfcollection') bezeichnet. In Abbildung 3.1 sind die verschiedenen Koagulationswechselwirkungen Auto-konversion, Akkreszenz und Selbsteinfang, die bei einer Zwei-Momenten-Parametrisierung auftreten, schematisch dargestellt. Offensichtlich bewirken nur Autokonversion und Akkreszenz einen Massentransfer von den Wolken- zu den Regentropfen. Der Autokonversion kommt hierbei eine Schlüsselrolle zu, da die Akkreszenz bereits die Existenz von Regentropfen voraussetzt. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird deshalb zunächst durch die Autokonversionsrate bestimmt.

3.2.1 Die Kesslersche Parametrisierung der Autokonversionsrate

Kessler (1969) gibt für die Autokonversionsrate eine heuristische Parametrisierung in Form eines Schwellenwertansatzes

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{au}} = - \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{au}} = \begin{cases} k_{KS} (L_c - L_{0,KS}) & \text{für } L_c > L_{0,KS} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9)$$

an, die er wie folgt begründet (Kessler, 1969, S. 26):

„As we know, water clouds sometimes persist for a long time without evidence of precipitation, but various measurements show that cloud amounts $\gtrsim 1 \text{ g m}^{-3}$ are usually associated with production of precipitation. It seems reasonable to model nature in a system where the rate of cloud autoconversion increases with the cloud content but is zero for amounts below some threshold.“

Kessler (1969) gibt damit jedoch keine physikalische Begründung für die Existenz eines derartigen Schwellenwertes.

Für die offenen Parameter verwendet Kessler (1969) die Zahlenwerte $k_{KS} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $L_{0,KS} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$. Obwohl Kessler (1969) noch anmerkt, dass diese Parameter entsprechend der atmosphärischen Bedingungen zu wählen sind und auch die Sensitivität des Systems auf Änderungen dieser Parameterwerte diskutiert, werden seitdem faktisch ausschließlich genau diese Zahlenwerte verwendet. Die Ursache hierfür ist vielleicht darin zu

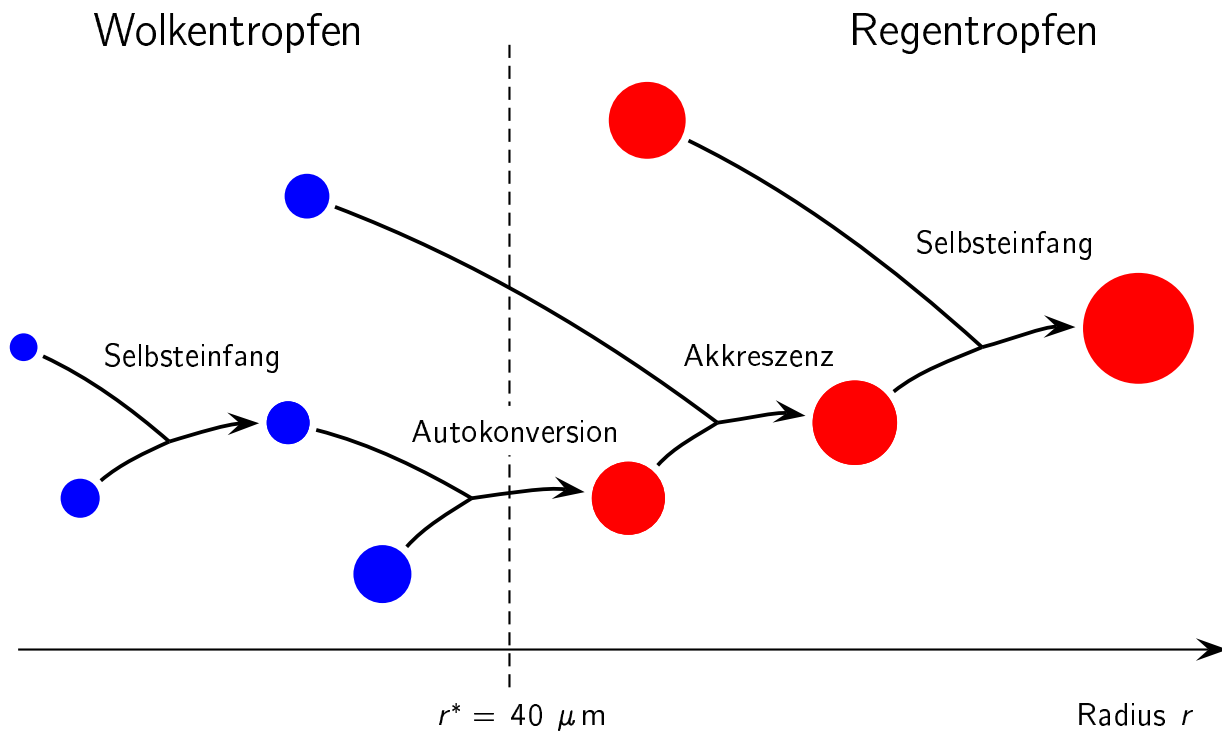


Abbildung 3.1: Skizze zur Definition der wolkenmikrophysikalischen Begriffe Selbsteinfang, Autokonversion und Akkreszenz bei parametrisierter Wolkenphysik. Als Selbsteinfang von Wolkentropfen wird ein Koagulationsvorgang bezeichnet, bei dem zwei Wolkentropfen sich zu einem größeren Wolkentropfen vereinigen. Autokonversion ist die Koagulation zweier Wolkentropfen zu einem Regentropfen und als Akkreszenz wird der Einfang eines Wolkentropfens durch einen Regentropfen bezeichnet. Der Selbsteinfang der Regentropfen führt zur Bildung eines Regentropfens durch Koagulation zweier kleinerer Regentropfen.

sehen, dass diese beiden Parameter nicht auf andere, messbare Größen wie die Anzahldichte oder den Durchmesser der Wolkentropfen zurückgeführt werden können.

Parallel hierzu und insbesondere in den folgenden Jahren wurde wiederholt versucht, verlässlichere Parametrisierungen zu formulieren (Berry, 1968; Berry und Reinhardt, 1974b; Höller, 1984). Beheng und Doms (1986) und Lüpkes (1991) zeigen jedoch, dass diese Parametrisierungen keine signifikante Verbesserung gegenüber der Kesslerschen Formulierung darstellen. Dies erreichen erst die Zwei-Momenten-Verfahren z.B. nach Lüpkes et al. (1989), Beheng (1994) oder Khairoutdinov und Kogan (2000) (siehe auch Seifert und Beheng, 2000).

3.2.2 Empirische Verteilungsfunktionen

Bei allen Parametrisierungen der wolkenmikrophysikalischen Prozesse müssen Annahmen über die Form der Größenverteilungsfunktion insbesondere der Regentropfen gemacht werden. Niederschlagsmessungen zeigen, dass die Anzahldichteverteilung bzgl. des Durchmessers für die großen Tropfen im zeitlichen Mittel exponentiell abfällt. Dies wurde bereits von Marshall und Palmer (1948) nachgewiesen. Im Rahmen der Wolkenphysik ist es deshalb auch üblich die Exponential-Verteilung

$$f(D) = N_0 e^{-\lambda D}, \quad (3.10)$$

in der als innere Koordinate der Durchmesser D auftritt, als Marshall-Palmer-Verteilung zu bezeichnen. Marshall und Palmer (1948) haben außerdem postuliert, dass der Vorfaktor N_0 näherungsweise eine Konstante und der Exponent λ nur eine Funktion der Regenrate ist. Beide Annahmen sind im Allgemeinen nicht haltbar, so zeigt z.B. Waldvogel (1974), dass sich der Vorfaktor N_0 der Exponential-Verteilung sogar während eines Niederschlagsereignisses sprunghaft ändern kann. Trotzdem basieren viele Parametrisierungen der Wolkenmikrophysik auf diesen Annahmen; insbesondere dann, wenn, wie im Fall der Kesslerschen Parametrisierung, nur ein Moment der Verteilungsfunktion prognostiziert wird. Die Verwendung von zwei Momenten ermöglicht es hingegen beide Parameter einer Exponential-Verteilung als Funktionen der Anzahl- und Massendichte zu formulieren. Im folgenden wird meist angenommen, dass die großen Tropfen näherungsweise einer Exponentialverteilung folgen, während für die kleinen Tropfen, die dem Wolkentropfenbereich zuzuordnen sind, eine Gamma-Verteilung verwendet wird (siehe Anhang A).

3.3 Parametrisierung der Koagulation von Tropfen

Im folgenden wird ein neues Verfahren zur Parametrisierung der Koagulationsprozesse von Tropfen vorgestellt, das es ermöglicht, für eine beliebige Koagulationsfunktion die entsprechenden integralen Beziehungen herzuleiten. Dabei wird zuerst eine Polynomapproximation der Koagulationsfunktion gesucht, aus der sich dann Näherungsformeln zur Beschreibung der einzelnen Prozesse ergeben. Diese werden dann auf der Basis einer Ähnlichkeitstheorie korrigiert, so dass auch der zeitliche Verlauf des Koagulationsprozesses beschrieben werden kann.

3.3.1 Approximation der Koagulationsfunktion

Ein möglicher Weg, Parametrisierungen der Koagulationsprozesse von Wolken- und Niederschlagspartikeln herzuleiten, besteht darin, eine geeignete Approximation der Koagulationsfunktion zu finden, die dann analytisch integriert werden kann. Verwendet man eine lineare Approximation, so führt dieser Weg direkt auf ein geschlossenes Gleichungssystem, d.h. Gleichungen, die nur Modellvariablen und Konstanten enthalten. Enthält die Approximation der Koagulationsfunktion nichtlineare Terme, so muss zusätzlich eine bestimmte Verteilungsfunktion angenommen werden, um das Gleichungssystem, das dann höhere Momente enthält, zu schließen. Long (1974) hat eine einfache Polynomapproximation der Koagulationsfunktion für Tropfen angegeben, die auf Parametrisierungsgleichungen z.B. für die Akkreszenzrate führt (Ziegler, 1985). Lüpkes et al. (1989) leiten aus der Longschen Approximation der Koagulationsfunktion eine Parametrisierung der Prozesse Autokonversion und Akkreszenz her, die gute Ergebnisse liefert. Jedoch ist der numerische Aufwand dieses Schemas bereits sehr hoch.

Im folgenden wird, Long (1974) folgend, eine stückweise definierte Approximation der Koagulationsfunktion gemäß Gl. (2.108)

$$K_{ww}(x, y) = \pi [r(x) + r(y)]^2 E_{koag}(x, y) |v(x) - v(y)| \quad (3.11)$$

gesucht, indem der Unterschied zwischen der empirischen Koagulationsfunktion und einem Ansatz $\tilde{K}(x, y; k_1, k_2)$ mit Parametern k_1 und k_2 minimiert wird. Im folgenden wird dabei als Fehlermaß die mittlere Abweichung gemäß

$$\Psi(k_1, k_2) = \frac{\int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} |K_{ww}(x, y) - \tilde{K}(x, y; k_1, k_2)| d \ln x d \ln y}{\int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} K_{ww}(x, y) d \ln x d \ln y} \quad (3.12)$$

verwendet. Ein logarithmisches Maß ist notwendig, da die Integrationsbereiche für x und y mehrere Größenordnungen umfassen. Die Integrationsgrenzen werden im folgenden noch diskutiert. Die verwendeten numerischen Verfahren sind dabei insbesondere die Gauß-Quadratur zur Approximation der Doppelintegrale (Press et al., 1992, S. 155) und das Powell-Verfahren zur Lösung des (mehrdimensionalen) Minimierungsproblems (Press et al., 1992, S. 411).

Long (1974) hat zur Approximation der Koagulationsfunktion den Ansatz

$$\tilde{K}(x, y; k_c, k_r) = \begin{cases} k_c(x^2 + y^2), & x, y < x^* \\ k_r(x + y), & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.13)$$

verwendet und für die beiden Parameter die Zahlenwerte $k_c = 9.44 \times 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$ und $k_r = 5.78 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ angegeben, wobei Long (1974) die Trennmasse x^* so gewählt hat, dass sie einem Tropfen mit einem Radius von $50 \text{ } \mu\text{m}$ entspricht. Longs Ziel bei der Formulierung dieser Approximation der Koagulationsfunktion war allerdings nicht die Herleitung einer Parametrisierung der Koagulation, sondern er verstand die Approximation der Koagulationsfunktion als einen ersten Schritt hin zu einer analytischen Lösung der kinetischen Gleichung. Leider ist es bis heute nicht gelungen, eine solche Lösung zu finden.

Im folgenden steht die Parametrisierung der drei Prozesse Autokonversion, Akkreszenz und Selbsteinfang der Wolken- und Regentropfen im Mittelpunkt. Es ist deshalb sinnvoll, statt der von Long (1974) empfohlenen Zweiteilung des Ansatzes eine Dreiteilung entsprechend der den genannten Prozessen zu Grunde liegenden Wechselwirkungen vorzunehmen. Diese hier erstmals durchgeführte Verallgemeinerung der Longschen Vorgehensweise führt auf eine bessere Approximation der Koagulationsfunktion und damit auf eine genauere Parametrisierung.

In Abbildung 3.2 ist das Integrationsgebiet in drei Teilbereiche gegliedert. Im Bereich I beschreibt die Koagulationsfunktion die Wechselwirkung der Wolkentropfen untereinander (Selbsteinfang der Wolkentropfen und Autokonversion). Die Bereiche II beinhalten die Wechselwirkung von Regentropfen mit Wolkentropfen (Akkreszenz) und Bereich III umfasst die Wechselwirkung von Regentropfen untereinander (Selbsteinfang der Regentropfen). Die Annahmen eines kleinsten bzw. größten Tropfens, der noch an der jeweiligen Wechselwirkung teilnimmt, ist hier in gewisser Weise willkürlich. Der physikalische Zusammenhang, dass Tropfen nur in einem bestimmten Größenbereich auftreten, geht im Prinzip erst später über die Verteilungsfunktion in die Koagulationsgleichung ein. Um die Integrationen ausführen zu können, ist es allerdings bereits an dieser Stelle notwendig, Annahmen über die möglichen bzw. charakteristischen Tropfengrößen zu machen.

Für die hier gewählten Integrationsgrenzen $r_{min} = 5 \text{ } \mu\text{m}$, $r^* = 40 \text{ } \mu\text{m}$, $r^{**} = 500 \text{ } \mu\text{m}$ und $r_{max} = 2000 \text{ } \mu\text{m}$ sind die Ergebnisse der numerischen Minimierung von Gl. (3.12) in Tabelle 3.1 für verschiedene Ansätze dargestellt. Die dabei verwendete Koagulationsfunktion basiert auf der Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2001) sowie der Koaleszenzeffizienz nach Beard und Ochs (1995) sowie Low und List (1982a, 1982b) und dem empirischen Fallgesetz nach

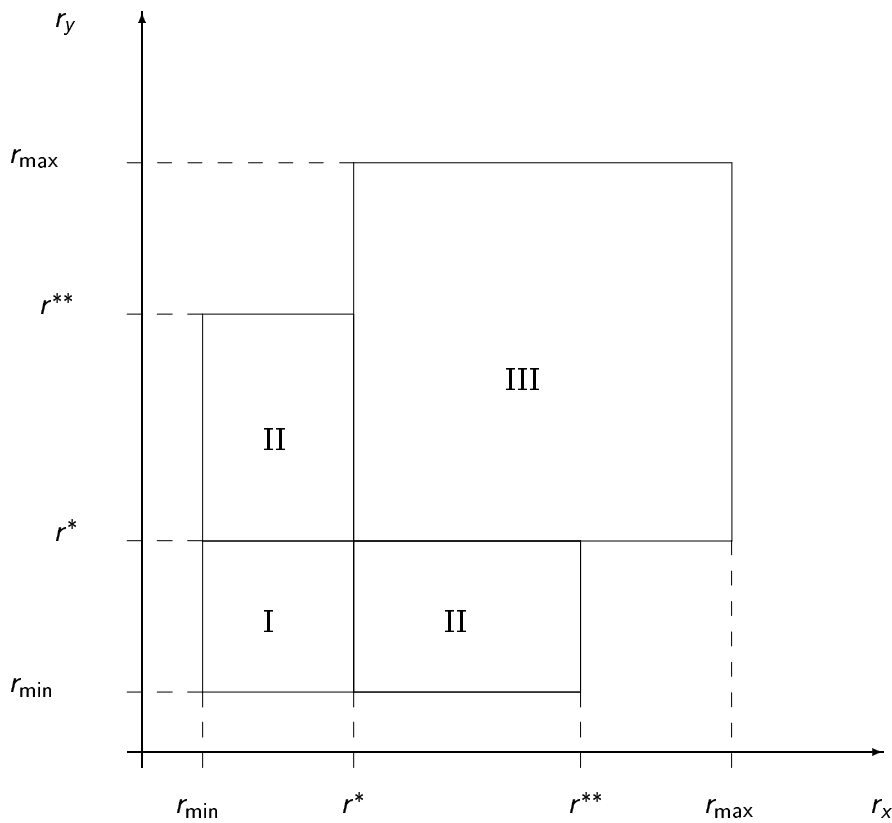


Abbildung 3.2: Skizze zur Definition der drei Integrationsbereiche.

Beard (1976) (siehe Abschnitt 2.2). Eine exakte Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Long (1974) ist demnach nicht zu erwarten. Es zeigt sich jedoch, dass die bereits von Long gefundenen Ansätze auch für diese Koagulationsfunktion gute Approximationen darstellen:

$$\tilde{K}(x, y) = \begin{cases} k_{cc}(x^2 + y^2), & x, y < x^* \\ k_{cr}(x + y), & x < x^* \vee y < x^* \\ k_{rr}(x + y), & x, y > x^* \end{cases} \quad (3.14)$$

mit $k_{cc} = 4.44 \times 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $k_{cr} = 5.25 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ sowie $k_{rr} = 2.87 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Insbesondere im Bereich III (Selbsteinfang der Regentropfen) kann durch die Verwendung eines zweiparametrischen Ansatzes noch eine geringfügige Verbesserung erreicht werden. Statt der obigen linearen Approximation ist dann ein Exponential-Ansatz der Form

$$\tilde{K}(x, y) = k_{rr}(x + y) \exp[-\kappa_{rr}(x^{1/3} + y^{1/3})], \quad x, y > x^* \quad (3.15)$$

mit $k_{rr} = 7.12 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ und $\kappa_{rr} = 6.07 \text{ g}^{-1/3}$ zu verwenden, der die Koagulations-eigenschaften sehr großer Tropfen besser beschreibt. In Tabelle 3.2 sind die Ergebnisse für die Approximation der Koagulationsfunktion unter Berücksichtigung des Turbulenzeinflusses auf die Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2000) dargestellt. Auch hier kann die Koagulationsfunktion in Bereich I durch den quadratischen Ansatz sehr gut approximiert werden. Im Vergleich zur Koagulation ohne Berücksichtigung der Turbulenz erhöht sich demnach bei einer turbulenten Dissipationsrate von $\epsilon = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ der Koeffizient im Wolkentropfenbereich von $k_{cc} = 4.44 \times 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$ auf $k_{cc,100} = 10.58 \times 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$, also um einen Faktor 2.5.

3.3.2 Integrale Formulierung der kinetischen Gleichung

Im folgenden wird gezeigt, wie unter Verwendung einer stückweise definierten Approximation der Koagulationsfunktion Parametrisierungen der integralen Koagulationsprozesse Autokonversion, Akkreszenz und Selbsteinfang hergeleitet werden können. Die Darstellung folgt dabei der Vorgehensweise von Seifert und Beheng (2000, 2001), wobei statt der Longschen Approximation der allgemeinere Ansatz gemäß Gl. (3.14) verwendet wird.

Betrachtet man ausschließlich die Koagulation von Tropfen, so kann der Quellterm $\sigma_w(x)$ in der Bilanzgleichung für die Momente M_w^k der Anzahldichteverteilung $f_w(x)$ durch die kinetische Gleichung (2.107) wie folgt spezifiziert werden:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial M_w^k}{\partial t} \right|_{\text{Koag}} &= \int_0^\infty x^k \sigma_{w,\text{Koag}}(x) dx \\
 &= \int_0^\infty x^k \left[\frac{1}{2} \int_0^x f_w(x-x') f_w(x') K_{ww}(x-x', x') dx' dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty f_w(x) f_w(x') K_{ww}(x, x') dx' \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^x f_w(x-x') f_w(x') K_{ww}(x-x', x') x^k dx' dx \\
 &\quad - \int_0^\infty \int_0^\infty f_w(x) f_w(x') K_{ww}(x, x') x^k dx' dx. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Tabelle 3.1: Stückweise Approximation der Koagulationsfunktion: Durch numerische Minimierung von Gl. (3.12) bestimmte Koeffizienten sowie der Wert des Fehlermaßes Ψ für einige verschiedene Ansätze. (Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2001), Koaleszenzeffizienz nach Beard und Ochs (1995) und Low und List (1982a, 1982b), Fallgesetz nach Beard (1976)).

Bereich	Ansatz	k_1	k_2	Ψ
I	k_1	0.6203E-05	—	0.3711E-09
I	$k_1(x + y)$	0.1164E+03	—	0.2617E-09
I	$k_1(x^2 + y^2)$	0.4442E+10	—	0.1647E-09
I	$k_1(x^3 + y^3)$	0.1161E+18	—	0.2046E-09
I	k_1xy	0.3971E+11	—	0.2222E-09
I	$k_1(x^2 + y^2) + k_2(x^3 + y^3)$	0.3255E+10	0.2396E+17	0.1571E-09
I	$k_1(x^{k_2} + y^{k_2})$	0.2739E+12	0.2235E+01	0.1602E-09
II	k_1	0.5246E-01	—	0.2032E-09
II	$k_1(x + y)$	0.4327E+04	—	0.2511E-10
II	$k_1(x^2 + y^2)$	0.3651E+09	—	0.1768E-09
II	$k_1(x^{k_2} + y^{k_2})$	0.7896E+04	0.1057E+01	0.2236E-10
III	k_1	0.2010E+01	—	0.5310E-09
III	$k_1(x + y)$	0.2866E+04	—	0.4208E-09
III	$k_1(x^2 + y^2)$	0.2108E+07	—	0.6135E-09
III	$k_1(x + y) \exp[-k_2(x^{1/3} + y^{1/3})]$	0.7116E+04	0.6073E+01	0.4047E-09
III	$k_1(x^{k_2} + y^{k_2})$	0.1886E+04	0.9303E+00	0.4179E-09

Tabelle 3.2: Wie Tabelle 3.1, jedoch unter Berücksichtigung des Turbulenzeinflusses auf die Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2000) (siehe Gl. (2.87)) für eine turbulente Dissipationsrate von $\epsilon = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$.

Bereich	Ansatz	k_1	k_2	Ψ
I	$k_1(x + y)$	0.2697E+03	—	0.2310E-09
I	$k_1(x^2 + y^2)$	0.1058E+11	—	0.1586E-09
I	$k_1(x^3 + y^3)$	0.2465E+18	—	0.2258E-09
I	$k_1(x^2 + y^2) + k_2(x^3 + y^3)$	0.9656E+10	0.1209E+17	0.1572E-09
I	$k_1(x^{k_2} + y^{k_2})$	0.2497E+11	0.2050E+01	0.1584E-09

Dabei ist $K_{ww}(x, x')$ die Koagulationsfunktion für die Tropfen-Tropfen-Wechselwirkung. Unter Verwendung der Diracschen Deltafunktion mit den Integraleigenschaften

$$\int_0^{\infty} f(x) \delta(y - x) = f(y) \quad (3.17)$$

$$\int_0^{\infty} f(y) \delta(x - y) = f(x) \quad (3.18)$$

erhält man (siehe z.B. Drake, 1972)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_w^k}{\partial t} \right|_{\text{Koag}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') \delta(x'' - x + x') x^k dx' dx'' dx \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') \delta(x - x'') x^k dx' dx'' dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') \\ &\quad [\delta(x'' - x + x') - 2\delta(x - x'')] x^k dx dx' dx'' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') [(x' + x'')^k - x'^k - x''^k] dx'' dx'. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Um die Integrale auszuführen und so ein Gleichungssystem zu erhalten, das nur noch Momente enthält und nicht die Anzahldichteverteilungsfunktion $f_w(x)$ selbst, ist es an dieser Stelle notwendig, die Koagulationsfunktion näher zu spezifizieren. Hier wird zunächst der stückweise definierte Polynomansatz gemäß Gl. (3.14) verwendet:

$$K_{ww}(x, y) = \begin{cases} k_{cc}(x^2 + y^2), & x, y < x^* \\ k_{cr}(x + y), & x < x^* \vee y < x^* \\ k_{rr}(x + y), & x, y > x^*. \end{cases} \quad (3.20)$$

Da dieser Ansatz stückweise definiert ist, ist es auch notwendig, so genannte partielle Ver-

teilungsfunktionen einzuführen, die wie folgt definiert sind:

$$f_c(x) = \begin{cases} f_w(x), & x < x^* \\ 0, & x \geq x^*, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$f_r(x) = \begin{cases} 0, & x < x^* \\ f_w(x), & x \geq x^* \end{cases} \quad (3.22)$$

und die Größenbereiche der Wolken- bzw. Regentropfen abdecken. Die zugehörigen partiellen Momente

$$M_c^k = \int_0^{x^*} x^k f_w(x) dx = \int_0^\infty x^k f_c(x) dx, \quad (3.23)$$

$$M_r^k = \int_{x^*}^\infty x^k f_w(x) dx = \int_0^\infty x^k f_r(x) dx \quad (3.24)$$

beschreiben die integralen Eigenschaften im Größenbereich der Wolken- bzw. Regentropfen. Die nullten Momente $M_c^0 = N_c$ und $M_r^0 = N_r$ sind dabei die Anzahldichten der Wolken- bzw. der Regentropfen; während die ersten Momente $M_c^1 = L_c$ und $M_r^1 = L_r$ die Massendichten (auch Partialdichten, Wolken- bzw. Regenwassergehalt) sind.

Unter diesen Annahmen erhält man die folgende Gleichung für die Momente

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_w^k}{\partial t} &= \frac{k_{cc}}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty f_c(x') f_c(x'') [(x' + x'')^k - x'^k - x''^k] (x'^2 + x''^2) dx'' dx' \\ &+ \frac{k_{cr}}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty [f_c(x') f_r(x'') + f_r(x') f_c(x'')] [(x' + x'')^k - x'^k - x''^k] (x' + x'') dx'' dx' \\ &+ \frac{k_{rr}}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty f_r(x') f_r(x'') [(x' + x'')^k - x'^k - x''^k] (x' + x'') dx'' dx'. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Für das nullte und das erste Moment kann man die Integrationen sofort ausführen und erhält

$$\frac{\partial M_w^0}{\partial t} = \frac{\partial N_w}{\partial t} = -k_{cc} N_c Z_c - k_{cr}(N_c L_r + N_r L_c) - k_{rr} N_r L_r \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial M_w^1}{\partial t} = \frac{\partial L_w}{\partial t} = 0. \quad (3.27)$$

Für die höheren Momente gilt mit dem Binomischen Satz und der Symmetrieeigenschaft des

Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_w^k}{\partial t} = & k_{cc} \int_0^\infty \int_0^\infty f_c(x') f_c(x'') \left[x'^k - \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} x'^{k-n} x''^n \right] (x'^2 + x''^2) dx'' dx' \\
& + k_{cr} \int_0^\infty \int_0^\infty [f_c(x') f_r(x'') + f_r(x') f_c(x'')] \\
& \quad \left[x'^k - \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} x'^{k-n} x''^n \right] (x' + x'') dx'' dx' \\
& + k_{rr} \int_0^\infty \int_0^\infty f_r(x') f_r(x'') \left[x'^k - \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} x'^{k-n} x''^n \right] (x' + x'') dx'' dx'. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Auch hier kann man nun die Integrationen ausführen und erhält so für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_w^k}{\partial t} = & k_{cc} \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k}{n} M_c^n M_c^{k-n+2} \\
& + k_{cr} \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k}{n} (M_c^n M_r^{k-n+1} + M_r^n M_c^{k-n+1}) \\
& + k_{rr} \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k}{n} M_r^n M_r^{k-n+1}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.26), (3.27) und (3.29) bilden ein (unendlichdimensionales) System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Momente der Verteilungsfunktion $f_w(x)$. Für den Polynomkern (3.20) ist dieses DGL-System äquivalent zur kinetischen Gleichung. Offensichtlich werden die Gleichungen für die Momente $k > 2$ schnell sehr kompliziert. Auf Grund der Nichtlinearität der Koagulationsfunktion für die Wechselwirkung der Wolkentropfen untereinander tritt außerdem in diesem DGL-System für die Momente ein Schließungsproblem auf: Die Gleichung für das k -te Moment enthält auch das $(k + 1)$ -te. Die Koagulationsfunktion für die Regentropfen ist linear in dem Sinne, dass hier kein Schließungsproblem auftritt - für diesen Koagulationskern existiert bekanntlich eine analytische Lösung (Golovin-Lösung). Ein zweites Schließungsproblem liegt darin, dass in diesem Gleichungssystem auf den rechten Seiten die partiellen Momente auftreten, die linken Seiten jedoch der zeitlichen Änderung der Gesamtmomente entsprechen. Eine Schließung kann indes durch die Annahme bestimmter Verteilungsfunktionen mit nur wenigen freien Parametern erfolgen.

3.3.3 Eine erste Näherung für die Autokonversionsrate (Grenzfall getrennter Spektren)

Mit dem im vorangehenden Abschnitt formulierten System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Momente der Anzahldichteverteilung kann eine Näherung für die Autokonversionsrate hergeleitet werden: Hierzu bricht man das Differentialgleichungssystem nach der dritten Gleichung ab, d.h. man betrachtet

$$\frac{\partial N_w}{\partial t} = -k_{cc}N_cZ_c - k_{cr}(N_cL_r + N_rL_c) - k_{rr}N_rL_r \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial L_w}{\partial t} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial Z_w}{\partial t} = 2k_{cc}L_cY_c + k_{cr}(L_cZ_r + L_rZ_c) + k_{rr}L_rZ_r. \quad (3.32)$$

Dabei ist $Z_j = M_j^2$ das zweite und $Y_j = M_j^3$ das dritte Moment der Anzahldichteverteilung $f_j(x)$ (mit $j = w, c, r$). Berücksichtigt man noch $M_w^k = M_c^k + M_r^k$, so sind dies nur drei Differentialgleichungen für sieben Variablen. Das System kann jedoch geschlossen werden, wenn Annahmen über die Form der gesamten Verteilungsfunktion $f_w(x)$ bzw. der partiellen Verteilungsfunktionen $f_c(x)$ und $f_r(x)$ gemacht werden.

Zunächst sollen jedoch die Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen (3.30)-(3.32) noch im Detail diskutiert werden. Offensichtlich beschreiben die jeweils ersten Terme, die den Koeffizienten k_{cc} enthalten, die Wechselwirkung der Wolkentropfen untereinander. Diese Terme entsprechen demnach den Beiträgen der Prozesse Autokonversion und Selbsteinfang der Wolkentropfen zur Änderung der Anzahldichte N_w bzw. der Reflektivität Z_w . Die zweiten Terme, die proportional zu k_{cr} sind, resultieren aus der Akkreszenz und die dritten Terme beschreiben die Beiträge des Selbsteinfangs der Regentropfen.

Die im obigen Differentialgleichungssystem (3.30)-(3.32) auftretenden höheren Momente können auf die Anzahl- und Massendichte zurückgeführt werden, wenn man sowohl für die Wolkentropfen als auch für die Regentropfen die Form der Verteilungsfunktion fest vorgibt. Da es sich dabei um partielle Momente handelt, muss jedoch vorausgesetzt werden, dass die Spektren getrennt sind, d.h. das gilt:

$$f_w(x^*) = f_r(x^*) = 0. \quad (3.33)$$

Eigentlich gibt es nur einen interessanten Fall, für den dies gut erfüllt ist: Ein reines Wolkentropfenspektrum mit $\bar{x}_c = L_c/N_c \ll x^*$, wie es im Anfangsstadium des Koagulationsprozesses auftritt. Zu Beginn des Koagulationsprozesses sind die Regentropfen nicht wesentlich

größer als es der Trennmasse x^* entspricht, deshalb kann hier auch die Näherung $\bar{x}_r \approx x^*$ verwendet werden. Wählt man für die Wolkentropfen eine Gamma-Verteilung in x , d.h.

$$f_c(x) = Ax^{\nu_c} e^{-Bx}, \quad \nu_c = \text{konst.} \quad (3.34)$$

und für die Regentropfen eine Exponential-Verteilung in D

$$f_r(D) = N_0 e^{-\lambda_r D}, \quad (3.35)$$

so ergeben sich für die höheren Momente die Beziehungen (siehe Anhang A)

$$Z_c = \frac{\nu_c + 2}{\nu_c + 1} \frac{L_c^2}{N_c}, \quad (3.36)$$

$$Y_c = \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 3)}{(\nu_c + 1)^2} \frac{L_c^3}{N_c^2}, \quad (3.37)$$

$$Z_r = 20 \frac{L_r^2}{N_r} \approx 20 L_r x^*. \quad (3.38)$$

Unter Verwendung der Massenerhaltung Gl. (3.31) bzw.

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} = -\frac{\partial L_c}{\partial t} \quad (3.39)$$

folgt mit der Näherung $\bar{x}_c \ll x^*$ aus den Beziehungen (3.36) - (3.38)

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} = \frac{1}{20 x^*} \left[\frac{\partial Z_w}{\partial t} + \bar{x}_c^2 \frac{\nu_c + 2}{\nu_c + 1} \frac{\partial N_c}{\partial t} \right]. \quad (3.40)$$

In der Anfangsphase des Koagulationsprozesses sind die Autokonversion und der Selbsteinfang der Wolkentropfen die dominanten Prozesse (Beheng und Doms, 1990). Anhand der Gleichungen (3.30)-(3.32) können damit die zeitlichen Änderungen von N und Z durch

$$\frac{\partial N_c}{\partial t} \approx \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{au,sc} = -k_{cc} N_c Z_c = -k_{cc} \frac{(\nu_c + 2)}{(\nu_c + 1)} L_c^2, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial Z_w}{\partial t} \approx \frac{\partial Z_w}{\partial t} \Big|_{au,sc} = 2 k_{cc} L_c Y_c = 2 k_{cc} \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 3)}{(\nu_c + 1)^2} L_c^2 \bar{x}_c^2 \quad (3.42)$$

spezifiziert werden. Da der Selbsteinfang der Wolkentropfen keinen Beitrag zu Änderung des Regenwassergehalts L_r liefert, folgt hieraus eine erste Näherung für die Autokonversionsrate, die insbesondere den Grenzfall eines reinen Wolkentropfenspektrums beschreibt:

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} = \frac{k_{cc}}{20 x^*} \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 4)}{(\nu_c + 1)^2} L_c^2 \bar{x}_c^2. \quad (3.43)$$

Dieses Resultat, das bereits von Seifert und Beheng (2001) angegeben wird, soll hier noch

auf den Fall der verallgemeinerten Gamma-Verteilung ausgeweitet werden. Entsprechend der obigen Herleitung ergibt sich dann

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} = \frac{k_{cc}}{20 x^*} \frac{2 \Gamma\left(\frac{\nu_c+4}{\mu_c}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_c+2}{\mu_c}\right) \Gamma^2\left(\frac{\nu_c+1}{\mu_c}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\nu_c+3}{\mu_c}\right) \Gamma^2\left(\frac{\nu_c+1}{\mu_c}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{\nu_c+2}{\mu_c}\right)} L_c^2 \bar{x}_c^2. \quad (3.44)$$

3.3.4 Näherungen für Akkreszenz und Selbsteinfang

Die Beiträge der Akkreszenz und des Selbsteinfangs der Regentropfen zur Änderung der Massen- und Anzahlichten können unter Verwendung einer stückweise definierten Approximation der Koagulationsfunktion sehr leicht direkt aus den Definitionsgleichungen nach Doms und Beheng (1986) berechnet werden. Diese Integraldarstellungen, die sich ebenfalls aus der kinetischen Gleichung herleiten lassen, sind

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} = -\frac{1}{2} \int_{x'=x^*}^{\infty} \int_{x''=x^*}^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') dx \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{ac} = - \int_{x'=0}^{x^*} \int_{x''=x^*}^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') dx \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{ac} = - \int_{x'=0}^{x^*} \int_{x''=x^*}^{\infty} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') x' dx. \quad (3.47)$$

Unter Verwendung des Polynomkerns (3.20) erhält man die Beziehungen

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} = -k_{rr} N_r L_r \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} (N_c L_r + L_c N_r) \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} (L_c L_r + Z_c N_r). \quad (3.50)$$

Die Beiträge zur Änderung der Anzahlichten sind offensichtlich mit den bereits diesen Prozessen zugeordneten Termen in Gl. (3.30) identisch. Approximiert man das Wolkentropfenspektrum wieder durch eine Gamma-Verteilung mit $\nu_c = \text{konst.}$, so folgt für die Akkreszenz-

raten

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} N_c L_r \left(1 + \frac{\bar{x}_c}{\bar{x}_r} \right) \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} L_c L_r \left(1 + \frac{\nu_c + 2 \bar{x}_c}{\nu_c + 1 \bar{x}_r} \right) \quad (3.52)$$

und mit $\bar{x}_r \gg \bar{x}_c$ kann jeweils der zweite Term vernachlässigt werden. Für die gesuchten Raten ergeben sich demnach die Näherungen

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} = -k_{rr} N_r L_r \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} N_c L_r \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} L_c L_r. \quad (3.55)$$

Verwendet man zur Approximation der Koagulationsfunktion für die Regentropfenwechselwirkung statt des linearen Ansatzes die Näherung (3.15), so erhält man für den Selbsteinfang der Regentropfen die Parametrisierung:

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} = k_{rr} N_r L_r \left(1 + \frac{\kappa_{rr}}{\lambda_r} \right)^{-9} \quad (3.56)$$

mit $\lambda_r = \lambda_r(\bar{x}_r)$ nach Gl. (A.4). Für eine Exponential-Verteilung in D ergibt sich z.B. $\lambda_r = (60/\bar{x}_r)^{1/3}$.

3.3.5 Invarianztransformation und Ähnlichkeitsgesetze

Bei den im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Näherungen für die integralen Koagulationsprozesse Autokonversion, Akkreszenz und Selbsteinfang konnte die Dynamik des Koagulationsprozesses, d.h. die zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums nicht hinreichend berücksichtigt werden. Um die höheren partiellen Momente der Tropfenanzahldichteverteilung allein auf die Anzahl- und Massendichten der Wolken- und Regentropfen zurückzuführen, ist es notwendig gewesen, die Form der Verteilungsfunktion durch eine bestimmte funktionale Abhängigkeit festzulegen. Diese als 'master-function-approach' bekannte Vorgehensweise schränkt die Entwicklung des Spektrums jedoch zu sehr ein: Insbesondere die Autokonversionsrate hängt empfindlich von der Existenz und Anzahl von Tropfen der Masse x^* ab. Um die Dynamik des Koagulationsprozesses korrekt wiederzugeben, ist es deshalb notwendig, die hergeleiteten Näherungen der Autokonversionsrate Gl. (3.43) und der Akkreszenzrate

Gl. (3.55) zu verallgemeinern und den Einfluss der Entwicklung des Tropfenspektrums besser zu berücksichtigen. Als Methode bieten sich hierbei Ähnlichkeitsgesetze an.

Ähnlichkeitsgesetze, meist durch eine Dimensionsanalyse gewonnen, spielen bei der Beschreibung nichtlinearer Prozesse, wie z.B. der Turbulenz eine zentrale Rolle, da sie es ermöglichen, das komplexe Verhalten eines nichtlinearen physikalischen Systems auf eine, allerdings a priori unbekannte Funktion zu reduzieren. Leider führt eine Dimensionsanalyse für die Koagulation eines polydispersen Systems nicht zum Erfolg. So hängt z.B. die Autokonversionsrate mindestens von den Parametern k_{cc} , L_c , \bar{x}_c , x^* und ν_c ab. Diese fünf Variablen enthalten jedoch nur drei physikalische Basiseinheiten (kg, m, s). Da k_{cc} mit der Einheit $\text{m}^3 \text{kg}^{-3} \text{s}^{-1}$ als einzige Größe die Basiseinheit s enthält, folgt zwar sofort die triviale Abhängigkeit

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} \sim k_c, \quad (3.57)$$

weitere Abhängigkeiten können auf diese Weise jedoch nicht identifiziert werden. Ein Ähnlichkeitsgesetz muss deshalb aus einem anderen Prinzip abgeleitet werden.

Im folgenden werden Invarianztransformationen untersucht - eine Methode, die in der Theoretischen Physik und insbesondere auch in der Turbulenztheorie gebräuchlich ist (siehe z.B. Effinger und Grossmann, 1987; Grossmann, 1990).

Da die kinetische Gleichung auf Grund der Tatsache, dass nur binäre Kollisionen (Zwei-eristöÙe) berücksichtigt werden, eine quadratische Form der Verteilungsfunktion $f(x)$ ist, kann sie formal durch

$$\frac{\partial f_w(x, t)}{\partial t} = \mathcal{K}[f_w^2(x, t)] \quad (3.58)$$

dargestellt werden. Der Funktionaloperator \mathcal{K} ist dabei linear im Argument $f_w^2(x, t)$. Wie man leicht zeigt, ist jede Gleichung dieser Form invariant unter der Transformation

$$\tilde{t} = \frac{t}{c} \quad (3.59)$$

$$\tilde{f}_w = c f_w, \quad (3.60)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Daraus folgt: Ist $f_w(x, t)$ Lösung der Gleichung (3.58), so ist $\tilde{f}_w(x, \tilde{t}) = c f_w(x, c\tilde{t})$ Lösung von

$$\frac{\partial \tilde{f}_w(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \mathcal{K}[\tilde{f}_w^2(x, \tilde{t})], \quad (3.61)$$

d.h. auch $\tilde{f}_w(x, \tilde{t})$ ist eine Lösung der kinetischen Gleichung. Zu jeder Lösung der kinetischen

Gleichung existiert demnach eine Schar von Ähnlichkeitslösungen, die man durch

$$\tilde{f}_w(x, t) = c f_w(x, ct) \quad (3.62)$$

gewinnt. Multipliziert man diese Beziehung mit x^k und integriert von $x = 0$ bis $x = \infty$, so folgt für die Momente von f_w und \tilde{f}_w

$$\tilde{M}_w^k(t) = c M_w^k(ct) \quad (3.63)$$

und mit $k = 1$ identifiziert man die Konstante c als das Verhältnis der Flüssigwassergehalte (siehe z.B. Srivastava, 1988; Hu und Srivastava, 1995), d.h es gilt

$$c = \frac{\tilde{L}_w}{L_w}. \quad (3.64)$$

Dies bedeutet auch, dass die Geschwindigkeit, mit der der Koagulationsprozess abläuft, proportional zum Flüssigwassergehalt L_w ist. Es ist offensichtlich notwendig, dass eine Parametrisierung der Koagulationsprozesse derartige Invarianz- und Ähnlichkeitsrelationen erfüllt. Wendet man die obige Transformation direkt auf die Integraldarstellung der Autokonversionsrate nach Doms und Beheng (1986)

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} = \int_{x'=0}^{x^*} \int_{x''=x^*-x'}^{x^*} f_w(x') f_w(x'') K_{ww}(x', x'') x' dx'' dx' \quad (3.65)$$

an, so ergibt sich die Ähnlichkeitsbeziehung:

$$\left. \frac{1}{\tilde{L}_c^2} \frac{\partial \tilde{L}_r(\tilde{f})}{\partial \tilde{t}} \right|_{au}(\tilde{t}) = \left. \frac{1}{L_c^2} \frac{\partial L_r(f)}{\partial t} \right|_{au}(t). \quad (3.66)$$

Woraus folgt, dass die Autokonversionsrate proportional zu L_c^2 ist. Dies stimmt mit der Näherung überein, die im vorangehenden Abschnitt direkt aus der Polynomapproximation der Koagulationsfunktion bestimmt wurde. Die Ähnlichkeitsrelation setzt jedoch keine bestimmte Koagulationsfunktion voraus und es gehen auch keine Annahmen über die Form der Verteilungsfunktion ein. Der hier gezeigte Zusammenhang ist demnach wesentlich allgemeiner.

Um weitere Invarianztransformationen zu finden, müssen Annahmen über die Koagulationsfunktion gemacht werden. Physikalisch sinnvoll ist z.B. die Annahme, dass der Kern eine homogene Funktion vom Grad γ ist, d.h. dass für alle $s \in \mathbb{R}$

$$K(sx, sy) = s^\gamma K(x, y) \quad (3.67)$$

gilt. Dies ist für sehr viele physikalische Systeme erfüllt (z.B. für die Koagulation von Partikeln unter Brownscher Bewegung). Mit einem solchen homogenen Kern ist die kinetische Gleichung invariant unter der allgemeineren Transformation

$$\tilde{t} = s^a t \quad (3.68)$$

$$\tilde{x} = s^b x \quad (3.69)$$

$$\tilde{f}_w = s^c f_w \quad (3.70)$$

mit $a, b, c \geq 0$ und es gilt die Relation

$$a + b(\gamma + 1) + c = 0, \quad (3.71)$$

wie man durch Einsetzen der Transformation in die kinetische Gleichung zeigt (z.B. Ernst, 1985). Hieraus können sehr weitgehende Eigenschaften der Lösungen der kinetischen Gleichung abgeleitet werden (Drake, 1972; Silk und White, 1978; Hendriks et al., 1983; van Dongen und Ernst, 1988). Leider sind die stückweise definierten Polynomapproximationen der Koagulationsfunktion, die in Abschnitt 3.3.1 hergeleitet worden sind, nicht homogen. Auf eine weitergehende Betrachtung von Transformationen, die die innere Koordinate x enthalten, wird deshalb an dieser Stelle verzichtet.

Bereits aus den gezeigten einfachen Ähnlichkeitsbeziehungen folgt, dass eine Parametrisierung der Autokonversionsrate proportional zu k_{cc} und L_w^2 bzw. L_c^2 sein muss. Aus der Transformationsbeziehung für die Zeit t mit $c = \tilde{L}_w/L_w$

$$\frac{\tilde{t}}{\tilde{L}_w} = \frac{t}{L_w} \quad (3.72)$$

folgt außerdem, dass das zeitliche Verhalten der Koagulation durch die Menge des verfügbaren Flüssigwassers dominiert wird. Da durch Koagulation stets nur größere Tropfen entstehen können, ist $L_c(t)$ eine monoton fallende Funktion von t . Damit kann durch

$$\tau = 1 - \frac{L_c(t)}{L_w} \quad (3.73)$$

eine dimensionslose interne Zeitskala gebildet werden, die die Ähnlichkeitseigenschaften des Systems beinhaltet (sog. dynamische Skalierung). Offensichtlich liegt für $\tau = 0$ ein reines Wolkentropfenspektrum vor, d.h. $\tau = 0$ entspricht dem Anfangszustand des Koagulationsprozesses. Der Endzustand der Koagulation, d.h. ein reines Regentropfenspektrum, entspricht $\tau = 1$. Dies bedeutet, dass die Zeitachse $t \in [0, \infty]$ auf $\tau \in [0, 1]$ abgebildet wird. Damit kann die explizite Zeitabhängigkeit der Autokonversionsrate eliminiert und auf eine Abhängig-

keit von den Variablen L_c und L_w reduziert werden. Der Einfluss der zeitlichen Entwicklung des Tropfenspektrums kann dann durch eine universelle Funktion beschrieben werden, die nur von der dimensionslosen Zeitskala τ abhängt. Diese Funktion muss allerdings experimentell oder durch numerische Simulation des Koagulationsprozesses bestimmt werden, da die Ähnlichkeitsbetrachtung keine Aussage über die Form der universellen Funktion macht. Als Ergebnis der Invarianz- bzw. Ähnlichkeitsbetrachtungen der kinetischen Gleichung gewinnt man demnach die Beziehung

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} \sim k_{cc} L_c^2 \Phi_{au}(\tau), \quad (3.74)$$

in der $\Phi_{au}(\tau)$ die noch zu bestimmende universelle Funktion ist. Ergänzt man die bereits im vorangehenden Abschnitt durch die Polynomapproximation der Koagulationsfunktion gefundene Näherung

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} = \frac{k_{cc}}{20 x^*} \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 4)}{(\nu_c + 1)^2} L_c^2 \bar{x}_c^2, \quad (3.75)$$

die den Grenzfall eines reinen Wolkentropfenspektrums beschreibt, d.h. den Grenzfall $\tau \rightarrow 0$, um die universelle Funktion, so ergibt sich für die Autokonversionsrate der Ansatz

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} = \frac{k_{cc}}{20 x^*} \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 4)}{(\nu_c + 1)^2} L_c^2 \bar{x}_c^2 \left[1 + \frac{\Phi_{au}(\tau)}{(1 - \tau)^2} \right]. \quad (3.76)$$

Aus diesem Ansatz folgt sofort $\Phi(0) = 0$. Der Term $(1 - \tau)^2 = L_c^2/L_w^2$ bewirkt, dass der zweite Term quadratisch von L_w anstatt von L_c abhängt, was eine Singularität von Φ_{au} für $\tau \rightarrow 1$ vermeidet. Außerdem kann dann $\Phi_{au}(\tau)$ als dimensionslose Autokonversionsrate interpretiert werden, da sich für $\Phi_{au}(\tau)/(1 - \tau)^2 \gg 1$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} \approx C(\bar{x}_c, L_w, \nu_c) \Phi_{au}(\tau) \quad (3.77)$$

ergibt und der Skalierungsfaktor $C(\bar{x}_c, L_w, \nu_c)$ näherungsweise konstant ist. Im nächsten Abschnitt wird die universelle Funktion $\Phi_{au}(\tau)$ durch numerische Simulation des Koagulationsprozesses bestimmt.

Eine Korrektur der bereits hergeleiteten Näherungen der Akkreszenz- und Selbsteinfangraten kann ebenfalls durch universelle Funktionen erfolgen. Im folgenden wird insbesondere eine universelle Funktion für die Akkreszenz eingeführt. Die Näherungen für die Akkreszenzraten

haben damit die Form

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} N_c L_r \Phi_{ac}(\tau) \quad (3.78)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{ac} = -k_{cr} L_c L_r \Phi_{ac}(\tau). \quad (3.79)$$

3.3.6 Bestimmung der universellen Funktionen durch numerische Simulation

Um die im vorangehenden Abschnitt postulierte Ähnlichkeitshypothese zu überprüfen und die offen gebliebenen universellen Φ -Funktionen zu bestimmen, wird im folgenden der Koagulationsprozess auf der Basis der kinetischen Koagulationsgleichung simuliert, d.h. die kinetische Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_w(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^x f_w(x-x', t) f_w(x', t) K_{ww}(x-x', x') dx' \\ & - \int_0^\infty f_w(x, t) f_w(x', t) K_{ww}(x, x') dx' \end{aligned} \quad (3.80)$$

wird numerisch gelöst. Dabei werden die Integralterme nach dem Verfahren von Berry und Reinhardt (1974a) durch finite Differenzen approximiert. Da der Wertebereich der inneren Koordinate mehrere Größenordnungen umfasst, wird eine diskrete logarithmische Massenkoordinate

$$x_{J+1} = x_J 2^{1/\alpha} = x_0 2^{J/\alpha} = x_0 e^{J/J_0} \quad \text{mit } \alpha = 3, \quad J_0 = \frac{\alpha}{\ln 2}, \quad (3.81)$$

mit 98 Gitterpunkten verwendet (Massenverdopplung alle drei Gitterpunkte). Die Koagulationsfunktion $K_{ww}(x, x')$ basiert wie in Abschnitt 3.3.1 auf der Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2001) sowie der Koaleszenzeffizienz nach Beard und Ochs (1995) und Low und List (1982a, 1982b) und dem empirischen Fallgesetz nach Beard (1976). Als Anfangsbedingung wird eine Gamma-Verteilung in x , d.h.

$$f_w(x, t = 0) = Ax^\nu e^{-Bx} \quad (3.82)$$

gewählt. Um die Φ -Funktionen für Autokonversion und Akkreszenz zu erhalten, werden zu jedem Zeitschritt aus der Anzahldichteverteilung $f_w(x)$ die integralen Umwandlungsraten berechnet, wozu ebenfalls die Integrationsverfahren nach Berry und Reinhardt (1974a)

verwendet werden.

Abbildung 3.3 zeigt die Ergebnisse für $\Phi_{au}(\tau)$ für verschiedene Simulationen, d.h. für verschiedene Anfangsbedingungen. Dabei sind die Ergebnisse von Simulationen mit gleichen mittleren Anfangsradien aber unterschiedlichem Flüssigwassergehalt in gleicher Farbe dargestellt. Offensichtlich ist die dynamische Ähnlichkeit der Lösungen gegeben, d.h. die dimensionslose Zeitskala τ bildet die einzelnen Simulationen aufeinander ab. In allen Simulationen erreicht die Autokonversionsrate für $\tau \approx 0.1$ ein Maximum, d.h. wenn 10 % des Flüssigwassers in Regentropfen umgewandelt worden sind, ist der Autokonversionsprozess am effizientesten. Der Anstieg der Autokonversionsrate in der Anfangsphase des Koagulationsprozesses ist auf die Entwicklung des Spektrums durch den Selbsteinfang der Wolkentropfen zurückzuführen. Die Autokonversionsrate wird dann besonders groß, wenn eine hinreichend große Anzahl von Tropfen größer als $30 \mu\text{m}$ Radius entstanden ist (Beheng und Doms, 1990). Die Skalierung der Autokonversionsrate proportional zu L_c^2 ist sehr gut erfüllt. Hingegen ist die Skalierung in Abhängigkeit von der mittleren Tropfengröße gemäß \bar{x}_c^2 , die vor allem auf der Auswertung des Polynomkerns basiert, nur näherungsweise gegeben. Im betrachteten Wertebereich sind die Ergebnisse jedoch noch befriedigend. Die universelle Φ -Funktion für den Autokonversionsprozess kann auf Grund dieser Simulationen durch die Funktion

$$\Phi_{au}(\tau) = 400 \tau^{0.7} (1 - \tau^{0.7})^3 \quad (3.83)$$

approximiert werden. Dies weicht nur wenig von den Resultaten von Seifert und Beheng (2001) ab, wobei die Unterschiede dadurch verursacht werden, dass Seifert und Beheng (2001) eine andere Koagulationsfunktion verwenden. Die Schwingungen, die in den numerischen Resultaten für Φ_{au} von Seifert und Beheng (2001) noch zu erkennen sind, treten hier auf Grund der höheren spektralen Auflösung - $\alpha = 3$ an Stelle von $\alpha = 2$ in Gl. (3.81) - nicht mehr auf.

Wie schon von Seifert und Beheng (2001) gezeigt, muss die Akkreszenzrate nur in der Anfangsphase des Koagulationsprozesses korrigiert werden (vgl. auch Cohard und Pinty, 2000a). Dazu wird die Funktion

$$\Phi_{ac}(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau + 5 \times 10^{-5}} \right)^4 \quad (3.84)$$

verwendet.

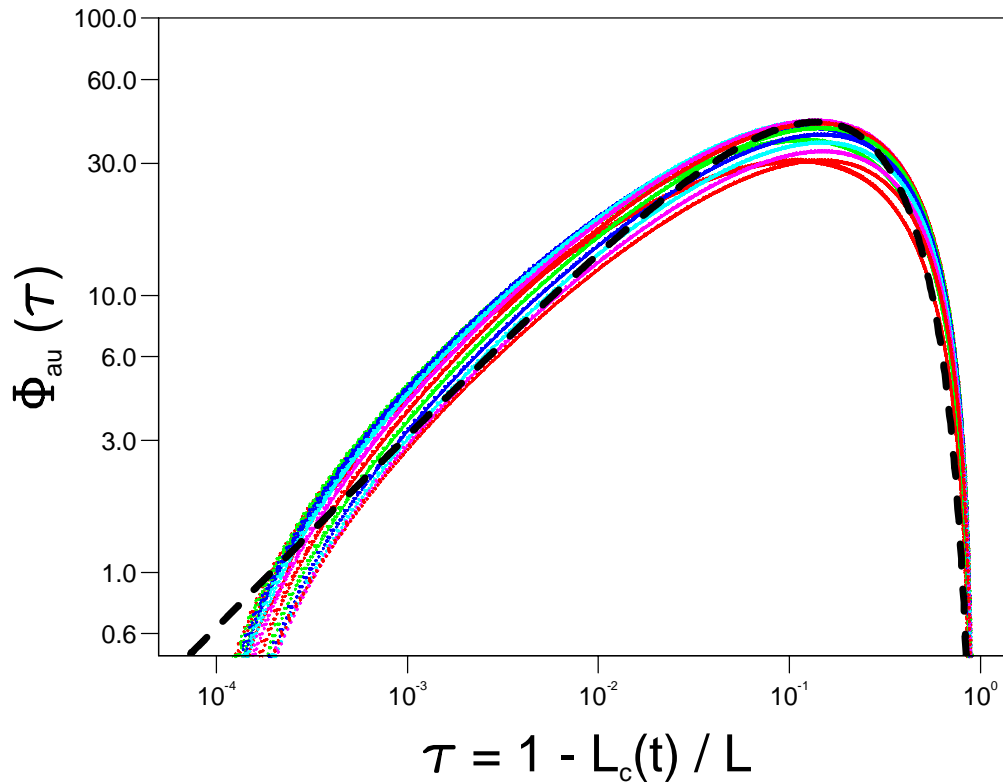


Abbildung 3.3: Numerische Ergebnisse für $\Phi_{au}(\tau)$ berechnet aus verschiedenen detaillierten Simulationen des Koagulationsprozesses und die Parametrisierung nach Gl. (3.83) (---).

3.4 Parametrisierung des Zerplatzens von Regentropfen

Das Zerplatzen der Regentropfen stellt einen Quellterm für die Anzahldichte der Regentropfen dar. Um diesen Prozess in einem Zwei-Variablen-Schema zu parametrisieren, ist es notwendig, zuerst die wesentlichen Eigenschaften dieses Prozesses - z.B. anhand von Ähnlichkeitsrelationen - zu betrachten.

Da auch beim kollisionalen Breakup nur Zweierstöße berücksichtigt werden, gilt analog zu Abschnitt 3.3.5

$$\frac{\partial f_w(x, t)}{\partial t} = \mathcal{K}[f_w^2(x, t)] - \mathcal{B}[f_w^2(x, t)], \quad (3.85)$$

wobei \mathcal{B} die formale Operator Darstellung des Breakup-Terms (2.110) ist. Offensichtlich gilt auch bei Berücksichtigung des Breakup-Prozesses weiterhin die fundamentale Invarianztrans-

formation

$$\tilde{t} = \frac{t}{c} \quad (3.86)$$

$$\tilde{f}_w = c f_w, \quad (3.87)$$

aus der die dynamische Ähnlichkeit der Lösungen resultiert. Zusätzlich besitzt die spektrale Gleichung nun aber eine stationäre Lösung, d.h. es gilt

$$\mathcal{K}[f_{eq}^2(x)] - \mathcal{B}[f_{eq}^2(x)] = 0. \quad (3.88)$$

Im stationären Zustand $f_{eq}^2(x)$ sind Koagulation und Breakup im Gleichgewicht. Die Form der Gleichgewichtslösung $f_{eq}^2(x)$ wird dabei durch die Koagulationsfunktion $K_{ww}(x, x')$ und die Bruchstückverteilungsfunktion $P(x; x', x'')$ bestimmt. Desweiteren gilt, dass für beliebige Anfangsbedingungen $f_w(x, 0)$ mit gleichem Flüssigwassergehalt L_w die Lösung von Gl. (3.85) gegen diesen Gleichgewichtszustand konvergiert (Gillespie und List, 1978; Valdez und Young, 1985; Brown, 1986; List et al., 1987; Hu und Srivastava, 1995; Mayer, 2000), d.h. es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_w(x, t) = f_{eq}(x). \quad (3.89)$$

Im Sinne der nichtlinearen Dynamik ist $f_{eq}(x)$ der globale Attraktor des Systems. Auf Grund der Ähnlichkeitsrelation sind die Gleichgewichtslösungen für verschiedene Flüssigwassergehalte mathematisch ähnlich, d.h. es gilt

$$f_{eq}(x; L) = L_w \psi_{eq}(x). \quad (3.90)$$

Hierbei ist $\psi_{eq}(x)$ eine universelle, normierte Funktion, die die Form aller Gleichgewichtslösungen des Systems festlegt, d.h. es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_w(x, t)}{L_w} = \psi_{eq}(x) \quad (3.91)$$

für jede beliebige Anfangsbedingung $f_w(x, 0)$ (List et al., 1987; List, 1988). Hieraus folgt auch, dass im Gleichgewichtszustand alle Momente der Verteilungsfunktion zueinander proportional sind (List, 1988)

$$M_{eq}^k = C_k L_w \quad \text{mit} \quad C_k = \int_0^{\infty} \psi_{eq}(x) x^k dx = \text{const.} \quad (3.92)$$

Dies bedeutet, dass die mittlere Tropfenmasse des Gleichgewichtszustands $\bar{x}_{eq} = L_w/N_{eq}$ oder der mittlere Tropfendurchmesser D_{eq} allgemeine Konstanten sind: Unabhängig vom

Flüssigwassergehalt oder der speziellen Anfangsbedingung konvergiert das System gegen eine Lösung mit dieser mittleren Tropfengröße.

Eine Parametrisierung des Breakup-Quellterms in der Bilanzgleichung der Anzahldichte der Regentropfen muss demnach die beiden Bedingungen

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{br} \sim L_r \quad (3.93)$$

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{br} = \left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} \quad \text{für } \bar{x}_r = \bar{x}_{eq} \quad (3.94)$$

erfüllen. Auf Grund von

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} \sim L_r \quad (3.95)$$

(siehe Abschnitt 3.3.4) ist der vielleicht einfachste Ansatz, der diesen Bedingungen genügt

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{br} = [k_{br} (\bar{D}_r - \bar{D}_{eq}) + 1] \left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} \quad (3.96)$$

mit einer Konstanten $k_{br} \in \mathbb{R}$, die durch Messungen oder durch numerische Simulation der Koagulations- und Breakup-Prozesse bestimmt werden muss.

Mayer (2000) hat auf der Basis des eindimensionalen Koagulationsmodells von Bayer et al. (1987) ein numerisches Modell entwickelt, das geeignet ist, die noch offenen Parameter k_{br} und \bar{D}_{eq} zu bestimmen. Die Beschreibung des Breakup-Prozesses in diesem Modell basiert auf den empirischen Funktionen nach Low und List (1982a, 1982b). Zur numerischen Approximation des Breakup-Terms in der spektralen Bilanzgleichung wird das Blecksche Ein-Momenten-Verfahren verwendet (Bleck, 1970; List und Gillespie, 1976; Brown, 1983), das für den Breakup-Prozess eine hinreichende Genauigkeit gewährleistet. Zur Approximation der Koagulationsterme wird hingegen das für den Koagulationsprozess wesentlich genauere Verfahren nach Berry und Reinhardt (1974a) verwendet. Gleichgewichtsspektren, wie sie durch das numerische Modell nach Mayer (2000) berechnet werden, sind für verschiedene Flüssigwassergehalte in Abb. 3.4 dargestellt. Deutlich erkennt man die für das Zerplatzen der Regentropfen typischen Maxima, die den unterschiedlichen Breakup-Mechanismen zugeordnet werden können (siehe Mayer, 2000). Die Ähnlichkeit der Gleichgewichtsspektren bei verschiedenen Flüssigwassergehalten ist hier offensichtlich.

In Abb. 3.5 ist der Quotient

$$\Phi_{br}(\bar{D}_r) = \frac{\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{br}}{\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc}} \quad (3.97)$$

als Funktion des mittleren Regentropfendurchmessers \bar{D}_r aus verschiedenen Simulationen mit dem eindimensionalen spektralen Koagulations-Breakup-Modell nach Mayer (2000) und der Ansatz

$$\Phi_{br}(\bar{D}_r) = k_{br}(\bar{D}_r - \bar{D}_{eq}) + 1 \quad (3.98)$$

dargestellt. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass näherungsweise $D_{eq} = 0.9 \times 10^{-3}$ m und $k_{br} = 1 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ angenommen werden kann. Allerdings ist diese Parametrisierung nur eine sehr grobe Approximation für die Wirkung des Breakup-Prozesses.

Verlinde und Cotton (1993) geben eine ähnliche Parametrisierung an, die neben dem Breakup-Vorgang auch die Koaleszenzeffizienz beschreibt. Diese ist in der vorliegenden Arbeit jedoch bereits in der Approximation der Koagulationsfunktion enthalten. Verlinde und Cotton (1993) nehmen für den stationären Zustand ebenfalls einen mittleren Durchmesser von $\bar{D}_{eq} = 0.9$ mm an, wobei sie den Zahlenwert aus den Messungen von Zawadzki und de Agostinho (1988) ableiten. Formuliert man deren Parametrisierung trotz der Unterschiede entsprechend der obigen, so ergibt sich

$$\Phi_{br}(\bar{D}_r) = \exp[k_b(\bar{D} - \bar{D}_b)] - 1 \quad (3.99)$$

mit $k_b = 2.3 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ und $\bar{D}_b = 6 \times 10^{-4}$ m. Diese Parametrisierung, die z.B. auch von Meyers et al. (1997) und Cohard und Pinty (2000a) verwendet wird, ergibt demnach für mittlere Durchmesser größer als 0.9 mm einen deutlich stärkeren Einfluss des Breakups auf die Anzahldichte der Regentropfen.

3.5 Parametrisierung der Sedimentation

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie in einem Zwei-Momenten-Schema der Prozess der Partikelsedimentation parametrisiert werden kann und welche Annahmen dabei gemacht werden müssen. Obwohl die Sedimentation verhältnismäßig einfach zu parametrisieren ist, wird dies hier ausführlich dargestellt, da die dabei verwendeten Parametrisierungsansätze im folgenden immer wieder auftreten.

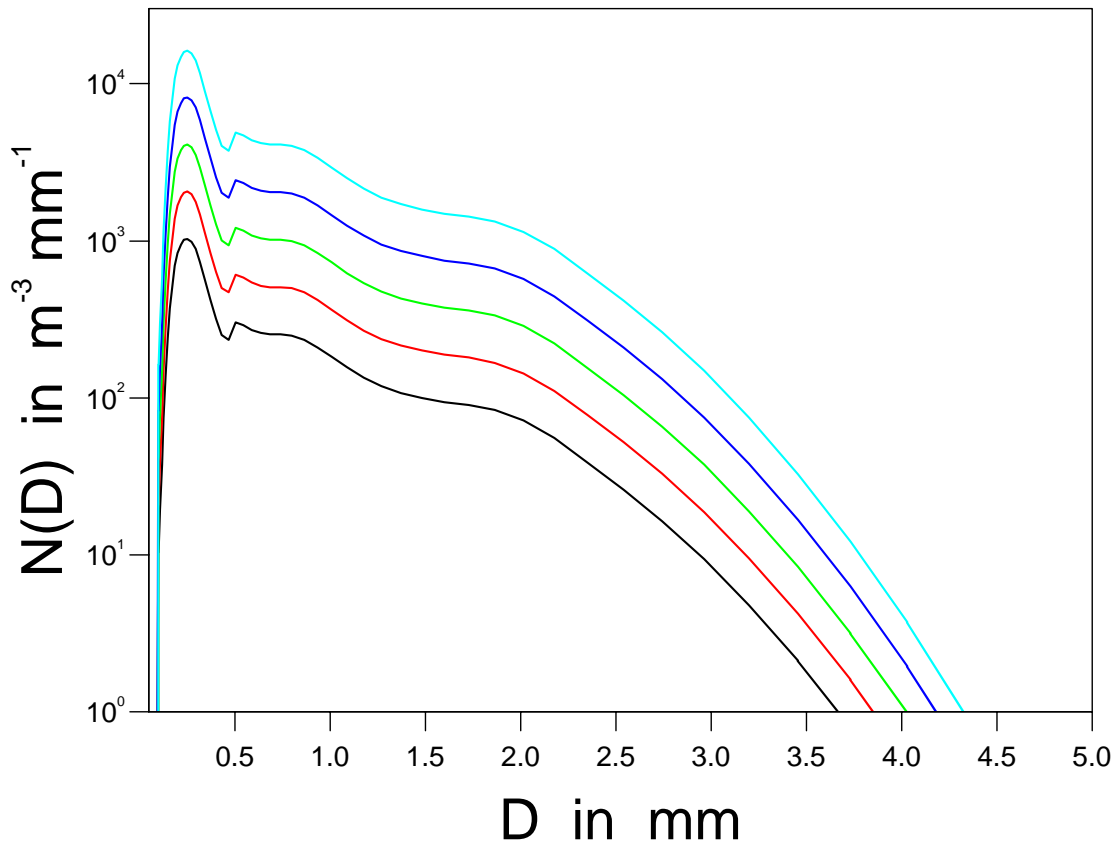


Abbildung 3.4: Anzahldichteverteilungsfunktion $f(D)$ in $\text{m}^{-3} \text{mm}^{-1}$ als Funktion des Durchmessers D in mm im Gleichgewichtszustand, berechnet mit dem spektralen Koagulations-Breakup-Modell nach Mayer (2000) für verschiedene Flüssigwassergehalte ($L = 8.0, 4.0, 2.0, 1.0, 0.5 \text{ g m}^{-3}$, von oben nach unten).

3.5.1 Die Sedimentation der Regentropfen

Zur Parametrisierung der Sedimentation der Regentropfen, also der Tropfen mit einer Masse größer als die Trennmasse x^* , müssen in einem Zwei-Momenten-Schema die Sedimentationsflüsse für die Anzahl- und die Massendichte, die durch

$$F_{r,0} = \int_{x^*}^{\infty} v_r(x) f_w(x) dx \quad (3.100)$$

$$F_{r,1} = \int_{x^*}^{\infty} v_r(x) f_w(x) x dx \quad (3.101)$$

gegeben sind, als Funktionen der Modellvariablen, d.h. als Funktionen von N_r und L_r formuliert werden. Als Approximation der Sedimentationsgeschwindigkeit $v_r(x)$ soll hier zunächst

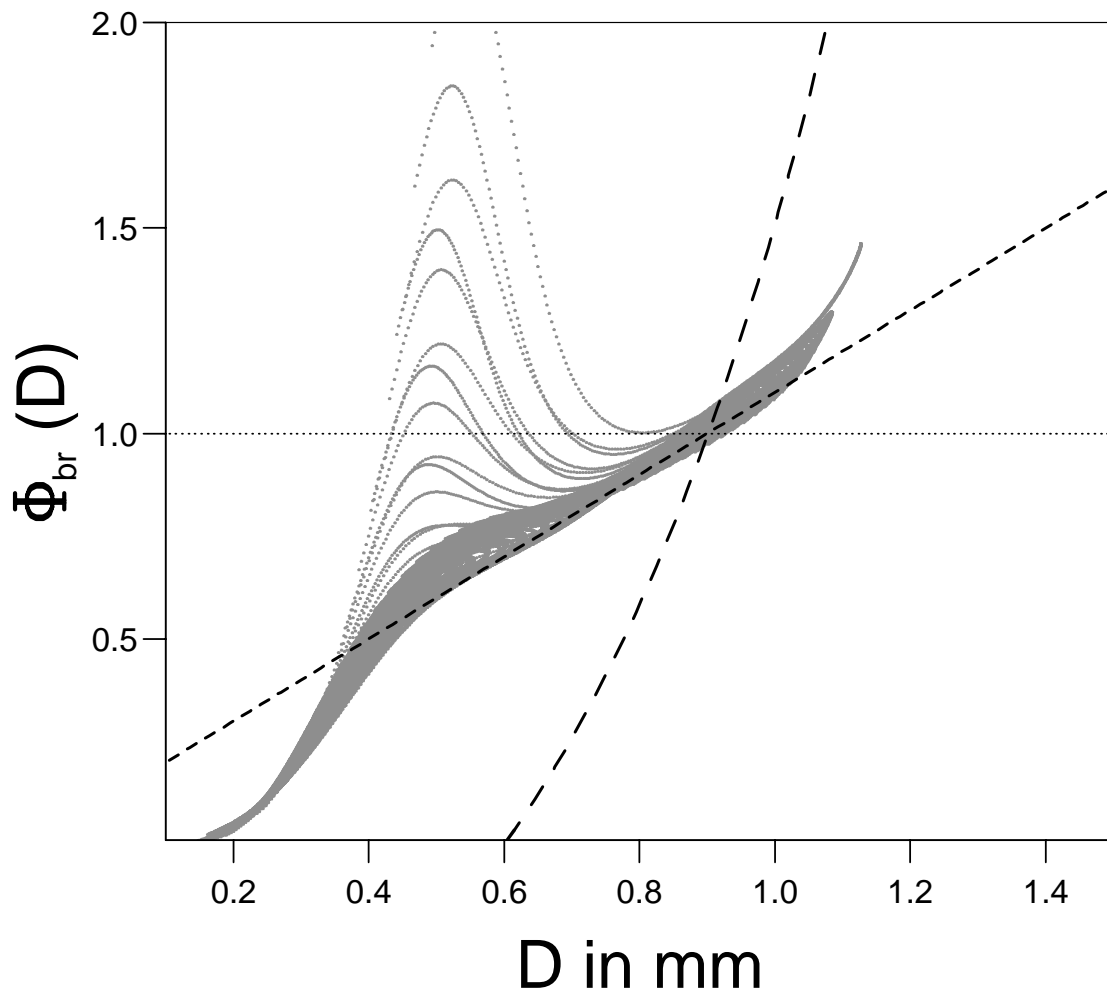


Abbildung 3.5: Quotient aus den Änderungsraten der Anzahldichte der Regentropfen durch Breakup und Selbsteinfang, berechnet aus Simulationen mit dem spektralen Koagulations-Breakup-Modell nach Mayer (2000). Dargestellt ist außerdem der Parametrisierungsansatz nach Gl. (3.97) mit $\bar{D}_{eq} = 0.9 \text{ mm}$ und $k_{br} = 1 \text{ mm}^{-1}$ (---) sowie der Ansatz nach Verlinde und Cotton (1993) entsprechend Gl. (3.99) (— — —).

ein einfacher Potenzansatz verwendet werden, d.h. es gilt

$$v_r(x) = \alpha_r x^{\beta_r} \quad (3.102)$$

und man erhält für den Sedimentationsfluss des k -ten Moments

$$F_{r,k} = \alpha_r \int_{x^*}^{\infty} f_w(x) x^{k+\beta_r} dx. \quad (3.103)$$

Dieses Integral kann nicht ausgewertet werden, ohne Annahmen über die Anzahldichteverteilungsfunktion $f_w(x)$ zu machen; insbesondere, da β_r nicht ganzzahlig ist. Beschreibt man das Tropfenensemble z.B. durch eine verallgemeinerte Gamma-Verteilung

$$f_w(x) = A_r x^{\nu_r} e^{-\lambda_r x^{\mu_r}} \quad (3.104)$$

mit konstanten Parametern ν_r und μ_r , so können die beiden Koeffizienten A_r und λ_r auf die Modellvariablen N_r und L_r zurückgeführt werden (siehe Anhang A). Nimmt man zusätzlich an, dass die mittlere Masse der Regentropfen - die in einem Zwei-Momenten-Schema stets durch den Quotienten aus der Massen- und der Anzahldichte, also durch

$$\bar{x}_r = \frac{L_r}{N_r} \quad (3.105)$$

gebildet werden kann - wesentlich größer ist als die Trennmassse x^* , d.h. es gilt $\bar{x}_r \gg x^*$, so kann der Sedimentationsfluss durch

$$F_{r,k} = \alpha_r A_r \int_0^{\infty} x^{k+\nu_r+\beta_r} e^{-\lambda_r x^{\mu_r}} dx \quad (3.106)$$

approximiert werden, d.h. die untere Integrationsgrenze kann auf $x = 0$ ausgedehnt werden. Dieses Integral kann dann auf die Gamma-Funktion zurückgeführt werden und man erhält die explizite Darstellung

$$F_{r,k} = \frac{\alpha_r A_r}{\mu_r} \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+\beta_r+1}{\mu_r}\right)}{\lambda_r^{-\frac{k+\nu_r+\beta_r+1}{\mu_r}}}. \quad (3.107)$$

Mit den Gleichungen (A.4) können nun A_r und λ_r , wie bereits angedeutet, durch die Modellvariablen N_r und L_r ersetzt werden, so dass folgt:

$$F_{r,k} = \alpha_r \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+\beta_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+2}{\mu_r}\right)} \right]^{k+\beta_r} N_r \bar{x}_r^{k+\beta_r}. \quad (3.108)$$

Mit Gl. (A.6), die die Momente der verallgemeinerten Gamma-Verteilung als Funktion der Modellvariablen N_r und L_r bzw. N_r und \bar{x}_r angibt, kann der Sedimentationsfluss des k -ten Moments als Produkt aus diesem Moment und einer Sedimentationsgeschwindigkeit ausgedrückt werden:

$$F_{r,k} = \alpha_r \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+\beta_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+2}{\mu_r}\right)} \right]^{\beta_r} \bar{x}_r^{\beta_r} M_r^k = \bar{v}_{r,k}(\bar{x}_r) M_r^k. \quad (3.109)$$

Die mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit des k -ten Moments ist dabei durch

$$\bar{v}_{r,k}(\bar{x}_r) = \alpha_r \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+\beta_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\nu_r+1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+2}{\mu_r}\right)} \right]^{\beta_r} \bar{x}_r^{\beta_r} = \alpha_{r,k} \bar{x}_r^{\beta_r} \quad (3.110)$$

gegeben. Die mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit hängt für alle Momente nur von der mittleren Tropfenmasse \bar{x}_r ab, wobei sich sogar nur die im Rahmen eines Zwei-Momenten-Schemas konstanten Vorfaktoren $\alpha_{r,k}$ unterscheiden. Desweiteren gilt $\alpha_{r,k+1} > \alpha_{r,k}$, d.h. die Folge der mittleren Sedimentationsgeschwindigkeiten $\bar{v}_k(\bar{x})$ wächst streng monoton mit k .

Betrachtet man ausschließlich die Sedimentation der Regentropfen, so reduziert sich Gl. (3.5) zu den vereinfachten Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} N_r \\ L_r \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} F_{r,0} \\ F_{r,1} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.111)$$

oder auch mit $F_{r,k} = v_k(\bar{x}) M_r^k = \alpha_{r,k} \bar{x}_r^{\beta_r} M^k$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} N_r \\ L_r \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \alpha_{r,0} \bar{x}_r^{\beta_r} N_r \\ \alpha_{r,1} \bar{x}_r^{\beta_r} L_r \end{pmatrix} = 0. \quad (3.112)$$

Um die Schwierigkeiten bei der Parametrisierung des Sedimentationsvorgangs aufzuzeigen, diskutieren Wacker und Seifert (2001) die Eigenschaften dieses Systems gekoppelter nicht-linearer partieller Differentialgleichungen und vergleichen es mit der spektralen Formulierung des Sedimentationsprozesses (siehe auch Wacker und Seifert, 2000; Seifert und Wacker, 2001). Der Fall der Ein-Momenten-Parametrisierung, der hier nicht in Form eines Gleichungssystems dargestellt ist, wird ausführlich von Wacker (2000a) diskutiert.

Wacker und Seifert (2001) betrachten insbesondere die raum-zeitliche Entwicklung einer zur Zeit $t = 0$ s vorgegebenen Rechteckwelle im Niederschlagsprofil. Das vertikale Profil des Regenwassergehalts für diese Anfangsbedingung und die Lösungen der verschiedenen Modelle nach einer Zeit von $t = 250$ s ist in Abb. 3.6 dargestellt. Während das spektrale Modell eine Glättung des Rechteckprofils im Laufe des Sedimentationsprozesses zeigt, erhält das Ein-Momenten-Schema die Schockwelle am unteren Rand der Welle. Im Fall des Zwei-Momenten-Schemas bildet sich eine Schockwelle aus, die sich sehr schnell ausbreitet und zum Zeitpunkt $t = 250$ s bereits den Boden erreicht hat. Dies kann so interpretiert werden, dass das Zwei-Momenten-Schema den Beitrag großer Tropfen bzw. die mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit überschätzt. Im Gegensatz dazu überschätzt das Ein-Momenten-Schema den Einfluss der kleinen Tropfen und unterschätzt damit die mittlere Sedimentationsge-

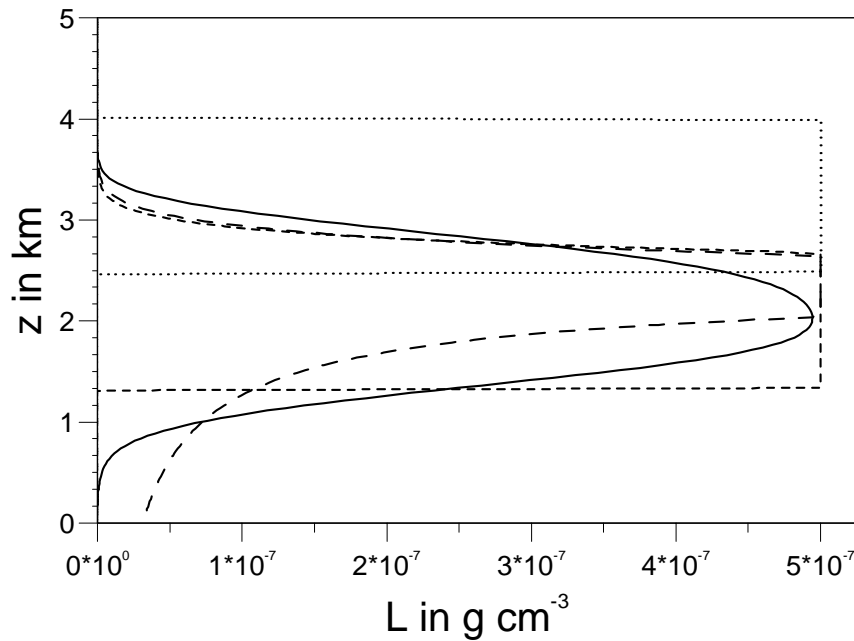


Abbildung 3.6: Vertikalprofil des Flüssigwassergehalts L für eine Anfangsbedingung in Form eines Rechteckprofils ($\cdot \cdot \cdot \cdot$). Analytische Lösungen für das spektrale Modell (—), das Ein-Momenten-Schema (- - -) und das Zwei-Momenten-Schema (- - -) nach $t = 250$ s (nach Wacker und Seifert, 2001).

schwindigkeit. Dies erkennt man auch anhand der zeitlichen Entwicklung der Regenrate am Boden, die in Abb. 3.7 dargestellt ist: Während im Fall des Zwei-Momenten-Schemas der Niederschlag zu früh einsetzt, zeigt das Ein-Momenten-Schema den gegenteiligen Effekt und überschätzt außerdem die maximale Regenrate deutlich.

Bei allen Untersuchungen zeigt sich, dass sich auch bei einem Zwei-Momenten-Schema auf Grund der einschränkenden Annahme über die Form der Verteilungsfunktion deutliche Unterschiede zum spektralen Modell ergeben. Durch die Nichtlinearitäten, die bei der parametrisierten Beschreibung auf Grund der Eliminierung der internen Koordinate auftreten, können Schockwellen entstehen, die im spektralen Sedimentationsmodell, das auf lineare Gleichungen führt, nicht auftreten.

Für Regentropfen ist ein Potenzgesetz für die Fallgeschwindigkeit nur eine ungenaue Approximation. Eine deutlich bessere Näherung ist das Fallgesetz nach Rogers et al. (1993):

$$v_{Rogers} = \begin{cases} a_{R01} - b_{R01} e^{-c_{R01} D_r}, & D_r \geq D_{R0} \\ a_{R02} D_r (1 - e^{-b_{R02} D_r}), & D_r < D_{R0}. \end{cases} \quad (3.113)$$

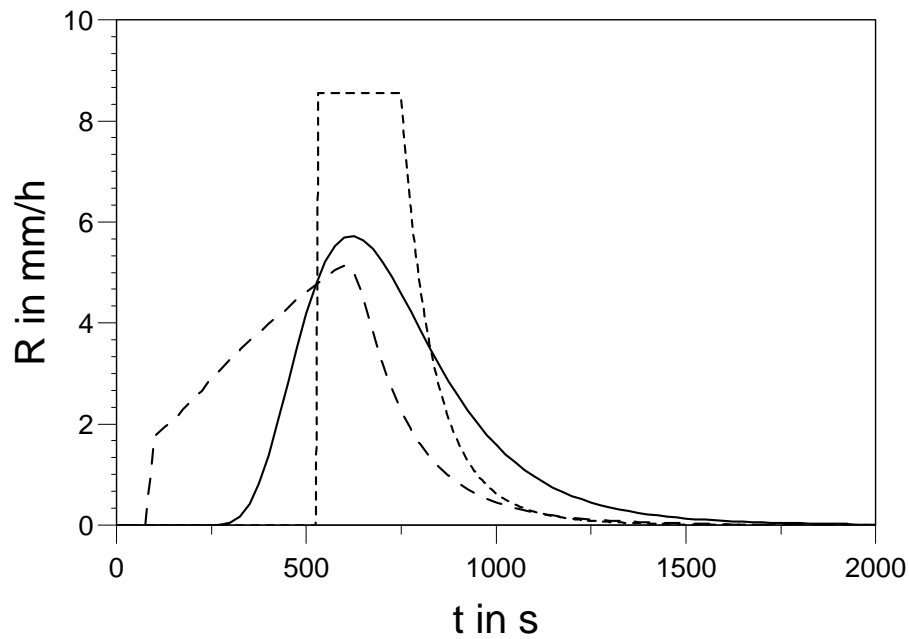


Abbildung 3.7: Entwicklung der Regenrate R am Boden für eine Anfangsbedingung in Form eines Rechteckprofils. Analytische Lösungen für das spektrale Modell (—) und das Ein-Momenten-Schema (- - - -). Numerische Approximation für das Zwei-Momenten-Schema (- - - -) (nach Wacker und Seifert, 2001).

Beschränkt man sich hierbei auf den einfachen Fall der Exponential-Verteilung in D_r , so ergibt sich für die mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit des k -ten Moments:

$$\bar{v}_{r,k} = \begin{cases} a_{Ro1} - b_{Ro1} \left[1 + \frac{c_{Ro1}}{\lambda_r} \right]^{-(3k+1)}, & \bar{D}_r \geq \bar{D}_{Ro,k} \\ a_{Ro2} \frac{3k+1}{\lambda_r} \left[1 - \left(1 + \frac{b_{Ro2}}{\lambda_r} \right)^{-(3k+2)} \right], & \bar{D}_r < \bar{D}_{Ro,k} \end{cases} \quad (3.114)$$

mit $\lambda_r = (\pi \rho_w / \bar{x}_r)^{1/3}$. Dabei sind die $\bar{D}_{Ro,k}$ so zu wählen, dass die mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit des k -ten Moments stetig ist. Man beachte $\bar{D}_{Ro,k} \neq \bar{D}_{Ro,j \neq k} \neq D_{Ro}$.

3.5.2 Die Sedimentation der Wolkentropfen

Lässt man die im Kesslerschen Schema gemachte Annahme fallen, die Sedimentation der Wolkentropfen zu vernachlässigen, so kann diese analog zur Sedimentation der Regentropfen behandelt werden. Da für Wolkentropfen das Stokessche Fallgesetz eine sehr gute Näherung

darstellt, erhält man unter Annahme einer verallgemeinerten Gamma-Verteilung

$$\bar{v}_{c,k}(\bar{x}) = \alpha_c \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_c+\beta_c+1}{\mu_c}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\nu_c+1}{\mu_c}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_c+1}{\mu_c}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_c+2}{\mu_c}\right)} \right]^{\beta_c} \bar{x}_c^{\beta_c} = \alpha_{c,k} \bar{x}_c^{\beta_c} \quad (3.115)$$

mit

$$\alpha_c = \left(\frac{1}{162\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{g}{\nu_a} \frac{\rho_w}{\rho} \quad \text{und} \quad \beta_c = \frac{2}{3}. \quad (3.116)$$

3.6 Vergleich der spektralen und der integralen Formulierung der Koagulationsprozesse anhand von numerischen Simulationen

Um die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Parametrisierungen zu überprüfen, bietet es sich an, Vergleichsrechnungen mit einem spektralen numerischen Modell durchzuführen, das die kinetische Gleichung explizit löst.

Im folgenden wird zunächst ein Vergleich gezeigt, bei dem nur der Koagulationsprozess an sich betrachtet wird, d.h. es wird ein so genanntes Box-Modell verwendet, das räumliche Homogenität voraussetzt. Eine umfassende Verifikation wird dann anhand eines Vergleichs mit einem eindimensionalen, horizontal homogenen Modell durchgeführt, das auch die Sedimentation der Regentropfen berücksichtigt.

3.6.1 Box-Modell

Betrachtet man ein gut durchmischtes Teilvolumen einer Wolke, so kann näherungsweise räumliche Homogenität angenommen werden. Die zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums durch Koagulation kann dann durch die kinetische Gleichung in der Form

$$\frac{\partial f_w(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^x f_w(x-x', t) f_w(x', t) K_{ww}(x-x', x') dx' - \int_0^\infty f_w(x, t) f_w(x', t) K_{ww}(x, x') dx' \quad (3.117)$$

beschrieben werden. Um diese Integro-Differentialgleichung numerisch zu lösen, werden die Integralterme wie bereits in Abschnitt 3.3.6 nach Berry und Reinhardt (1974a) durch finite Differenzen approximiert (98 Gitterpunkte, Massenverdopplung alle 3 Gitterpunkte) und als Zeitdiskretisierung wird das Eulersche Verfahren erster Ordnung mit einem Zeitschritt von 2 s verwendet. Die Koagulationsfunktion $K_{ww}(x, x')$ basiert wie in Abschnitt 3.3.1 auf der Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2001) sowie der Koaleszenzeffizienz nach Beard und Ochs (1995) und Low und List (1982a, 1982b) und dem empirischen Fallgesetz nach Beard (1976). Als Anfangsbedingung für die Verteilungsfunktion wird eine Gamma-Verteilung gemäß

$$f_w(x, t = 0) = f_0(x) = Ax^{\nu_0} e^{-\lambda x} \quad (3.118)$$

verwendet. Die Parameter A und λ können aus dem Flüssigwassergehalt L_0 und dem mittleren Radius \bar{r}_0 der Anfangsbedingung berechnet werden (siehe Anhang A).

Das auf die Parametrisierung der Wolkenmikrophysik aufbauende Modell basiert auf dem folgenden System von Differentialgleichungen für die Anzahl- und Massendichten der Wolken- bzw. Regentropfen:

$$\frac{\partial N_c}{\partial t} = - \left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{sc} - \frac{2}{x^*} \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} - \frac{1}{\bar{x}_c} \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{ac} \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial t} = - \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} - \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{ac} \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} = + \frac{1}{x^*} \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} - \left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} = + \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} + \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{ac} \quad (3.122)$$

Die Koagulationsterme für den Selbsteinfang der Wolken- bzw. Regentropfen sowie für Autokonversion und Akkreszenz werden entsprechend Abschnitt 3.3.4 und 3.3.5 durch

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} = \frac{k_{cc}}{20 x^*} \frac{(\nu_c + 2)(\nu_c + 4)}{(\nu_c + 1)^2} L_c^2 \bar{x}_c^2 \left[1 + \frac{\Phi_{au}(\tau)}{(1 - \tau)^2} \right] \quad (3.123)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{ac} = k_{cr} L_c L_r \Phi_{ac}(\tau) \quad (3.124)$$

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{sc} = k_{cc} \frac{(\nu_c + 2)}{(\nu_c + 1)} L_c^2 - \frac{2}{x^*} \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{au} \quad (3.125)$$

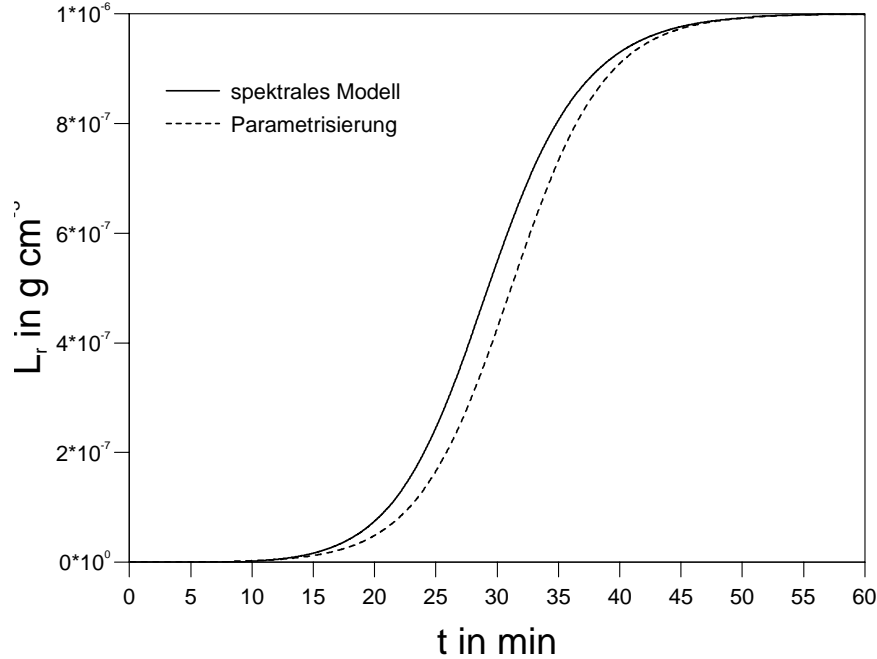


Abbildung 3.8: Zeitlicher Verlauf des Regenwassergehalts L_r in g cm^{-3} für eine Simulation mit dem spektralen Box-Modell und der parametrischen Beschreibung ($L_0 = 1.0 \text{ g m}^{-3}$, $\bar{r}_0 = 12 \text{ } \mu\text{m}$, $\nu_0 = 0$).

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{sc} = k_{rr} N_r L_r \left(1 + \frac{\kappa_{rr}}{\lambda_r} \right)^{-9} \quad (3.126)$$

mit λ_r nach Gl. (A.4) sowie $k_{rr} = 7.12 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ und $\kappa_{rr} = 6.07 \text{ g}^{-1/3}$ spezifiziert (siehe Abschnitt 3.3.1). Für die Φ -Funktionen werden die in Abschnitt 3.3.6 numerisch bestimmten Ansätze

$$\Phi_{au}(\tau) = 400 \tau^{0.7} (1 - \tau^{0.7})^3 \quad (3.127)$$

$$\Phi_{ac}(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau + 5 \times 10^{-5}} \right)^4 \quad (3.128)$$

verwendet. Die Anfangsbedingung wird entsprechend dem spektralen Modell gesetzt, wobei $\nu_c = \nu_0$ angenommen wird.

Abbildung 3.8 zeigt den zeitlichen Verlauf des Regenwassergehalts für Simulationen mit der Anfangsbedingung $L_0 = 1.0 \text{ g m}^{-3}$, $\bar{r}_0 = 12 \text{ } \mu\text{m}$ und $\nu_0 = 0$. Beide Modelle ergeben, dass mit der Zeit das Wolkenwasser vollständig in Regenwasser umgewandelt wird. Der zeitliche Verlauf des Regenwassergehalts L_r zeigt dabei das typische Verhalten eines

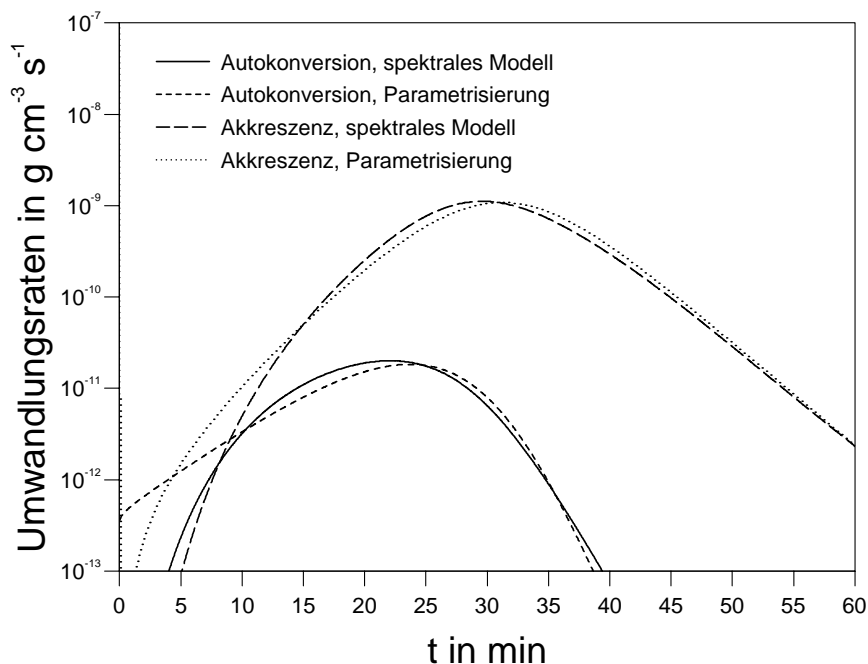


Abbildung 3.9: Zeitlicher Verlauf der Autokonversions- und Akkreszenzrate in $\text{g cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ für eine Simulation mit dem spektralen Box-Modell und der parametrischen Beschreibung ($L_0 = 1.0 \text{ g m}^{-3}$, $\bar{r}_0 = 12 \text{ } \mu\text{m}$, $\nu_0 = 0$).

instabilen, nichtlinearen Systems: Während zu Beginn nur sehr wenig Regenwasser entsteht, steigt die Umwandlungsrate nach 15 min rasch an und nach ca. 28 min ist bereits die Hälfte des anfänglichen Wolkenwassers in Regenwasser umgewandelt; die Umwandlungsrate ist zu diesem Zeitpunkt maximal und nimmt dann wieder ab. Nach 50 min ist das Wolkenwasser fast vollständig in Regenwasser umgewandelt. Die parametrische Beschreibung zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem spektralen Modell; die Koagulation läuft allerdings etwas langsamer ab; d.h. es tritt eine Phasenverschiebung von ca. 2 min auf. Interessant ist es, die einzelnen Beiträge der Autokonversion und Akkreszenz zur gesamten Umwandlungsrate des Wolkenwassers in Regenwasser, die in Abbildung 3.9 dargestellt sind, zu betrachten. Dabei zeigt sich, dass die Parametrisierung der Koagulation anfangs die Autokonversionsrate überschätzt. Das spektrale Modell ergibt für diese Anfangsbedingung bei $t = 0$ keine Umwandlung von Wolken- zu Regenwasser durch Autokonversion. Erst nachdem sich das Tropfenspektrum entwickelt hat, setzt nach ca. 4 min der Autokonversionsprozess ein. Dies kann die Parametrisierung so nicht wiedergeben, da diese voraussetzt, dass die Autokonversionsrate für $t = 0$ ungleich null ist - sonst würde sich im Fall der parametrischen Beschreibung auch

nie Regenwasser bilden. Da bei parametrisierter Koagulation sofort Regentropfen entstehen, ergibt sich auch sehr früh ein signifikanter Beitrag der Akkreszenz. In beiden Modellen steigt die Autokonversionsrate in den ersten 20 Minuten mit der Zeit an - physikalisch bedeutet dies, dass sich immer mehr große Wolkentropfen bilden, die effizient zum Autokonversionsprozess beitragen. Sobald sich eine signifikante Anzahl von Regentropfen gebildet hat, steigt dann die Akkreszenzrate in beiden Modellen schnell an und dominiert nach 10 bis 15 min die Umwandlung des Wolkenwassers in Regenwasser. Obwohl sich bei dieser Vergleichsrechnung zwischen der detaillierten Beschreibung durch die kinetische Gleichung und der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Parametrisierung der Koagulation signifikante Unterschiede zeigen und die parametrische Beschreibung in manchen Aspekten physikalisch sicherlich unbefriedigend bleibt, kann doch eine deutliche Verbesserung gegenüber den bislang verwendeten Parametrisierungen erreicht werden. Insbesondere kann mit dieser Parametrisierung der Anstieg der Autokonversionsrate zu Beginn des Koagulationsprozesses beschrieben werden, was weder mit der Kesslerschen Parametrisierung gelingt noch mit den Koagulationsparametrisierungen nach Beheng (1994) oder Khairoutdinov und Kogan (2000) (siehe z.B. Abb. 2 in Beheng, 1994). Auf einen direkten Vergleich mit diesen oder anderen Parametrisierungen wird hier verzichtet, da z.B. die Parametrisierung nach Beheng (1994) auf einer empirischen Kollisionseffizienz basiert, die signifikante Unterschiede zu der genaueren Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2001) aufweist; außerdem berücksichtigt Beheng (1994) die Koaleszenzeffizienz der Tropfen nicht. Hinzu kommt, dass ein Vergleich mit diesen Parametrisierungen auf der Basis ähnlicher Kollisionseffizienzen bereits von Seifert und Beheng (2000) sowie Seifert und Beheng (2001) durchgeführt wurde, wobei gezeigt werden konnte, dass die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Parametrisierung gerade bei kleinen mittleren Radien der Wolkentropfen bessere Ergebnisse liefert.

Stattdessen wird im nächsten Abschnitt ein umfassender Vergleich mit einem eindimensionalen spektralen Niederschlagsmodell durchgeführt. Ziel ist es zu verifizieren, in welchem Parameterbereich der Anfangsbedingung die parametrische Beschreibung gute Ergebnisse liefert und unter welchen Bedingungen größere Fehler auftreten.

3.6.2 Eindimensionales Modell

Im folgenden wird horizontale Homogenität angenommen, d.h. die spektrale Bilanzgleichung Gl. (2.106) reduziert sich auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f_w(z, x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} [v_w(x) f_w(z, x, t)] = \sigma_w(x) \quad (3.129)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_w(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f_w(z, x-x', t) f_w(z, x', t) K_{ww}(x-x', x') dx' \\ - \int_0^\infty f_w(z, x, t) f_w(z, x', t) K_{ww}(x, x') dx'. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Die Koagulationsterme werden wie im vorangehenden Abschnitt berechnet. Zur Behandlung der Sedimentation wird allerdings nicht das Potenzgesetz verwendet, sondern die Approximation des Fallgesetzes nach Rogers et al. (1993).

Das eindimensionale Modell mit parametrisierter Wolkenmikrophysik besteht aus dem folgenden System partieller Differentialgleichungen für die Anzahl- und Massendichten der Wolken- bzw. Regentropfen; nun unter Berücksichtigung der Sedimentation der Regentropfen:

$$\frac{\partial N_c}{\partial t} = - \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{sc} - \frac{2}{x^*} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} - \frac{1}{\bar{x}_c} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{ac} \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial t} = - \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} - \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{ac} \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} - \frac{\partial [\bar{v}_{N,r}(\bar{x}_r) N_r]}{\partial z} = + \frac{1}{x^*} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} - \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{sc} \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} - \frac{\partial [\bar{v}_{L,r}(\bar{x}_r) L_r]}{\partial z} = + \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} + \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{ac}. \quad (3.134)$$

Für die Vergleichsrechnungen wurde eine Höhe der vertikalen Säule von 5 km angenommen. Bei 50 Gitterpunkten zur Diskretisierung der Vertikalkoordinate ergibt dies eine Gitterweite von 250 m. Die Zeitintegration wird auch in diesem Modell für alle Gleichungen durch das Eulersche Verfahren mit einem Zeitschritt von 2 s realisiert, wobei alle Terme jeweils zum gleichen Zeitpunkt berechnet werden, d.h. es wird kein Zeitsplitting/Operatorsplitting angewandt. In beiden Modellen werden die Sedimentationsflüsse numerisch durch das Flusskor-

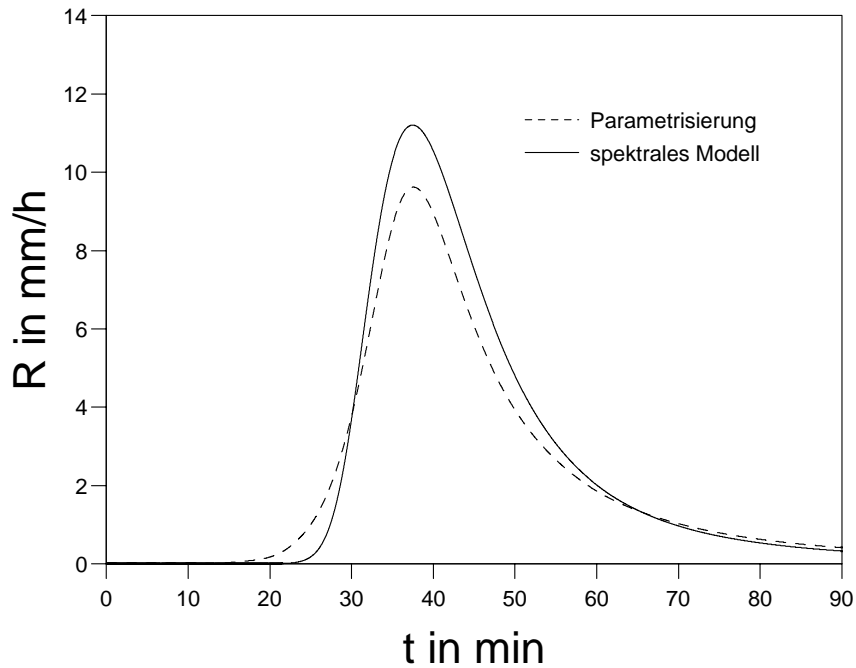


Abbildung 3.10: Zeitliche Entwicklung der Regenrate am Boden für die Anfangsbedingung $L_0 = 1.0 \text{ g m}^{-3}$ und $\bar{r}_0 = 14 \text{ }\mu\text{m}$ für das spektrale Modell (—) und die Parametrisierung (---).

rekurverfahren nach Boris und Book (1973) mit der Limiterfunktion nach Roe und Baines (1982) approximiert.

Für alle Simulationen wird für das spektrale Modell die Anfangsbedingung

$$f_w(x, z, t = 0) = f_0(x, z) = \begin{cases} Ax^\nu e^{-\lambda x} & \text{für } z_c \leq z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.135)$$

mit $z_c = 1 \text{ km}$ verwendet, für das parametrische Modell die dieser Anfangsbedingung entsprechenden Werte für die Anzahl- und Massendichte der Wolkentropfen. Die Anfangsbedingung enthält die drei freien Parameter A , λ und ν , wobei die ersten beiden Parameter durch den Flüssigwassergehalt L_0 und den mittleren Radius der Tropfen \bar{r}_0 des Anfangsspektrums bestimmt werden. Der Parameter ν ist bei der parametrischen Beschreibung eine Konstante ν_c .

Da das verwendete Modell bzw. das Testproblem einer sehr idealisierten Situation entspricht, genügt es im folgenden, die Unterschiede zwischen der spektralen und der parametrischen Beschreibung ausschließlich anhand der Regenrate am Boden zu diskutieren.

In Abbildung 3.10 ist die zeitliche Entwicklung der Regenrate am Boden für einen maritimen

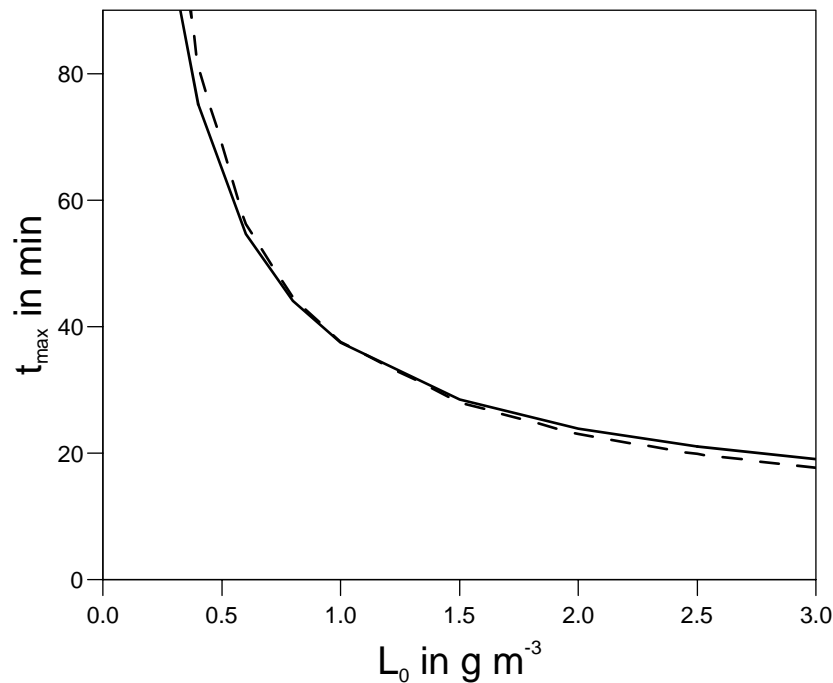


Abbildung 3.11: Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0 in g m^{-3} für ein Ensemble von Simulationen mit dem spektralen Modell (—) und der parametrischen Beschreibung (---) ($\bar{r}_0 = 14 \mu\text{m}$, $\nu = 0$).

Fall mit der Anfangsbedingung $L_0 = 1.0 \text{ g m}^{-3}$, $\bar{r}_0 = 14 \mu\text{m}$ und $\nu = 0$ dargestellt. Das spektrale Modell ergibt eine Regenrate, die nach 25 Minuten sehr rasch ansteigt und nach 37 Minuten ein Maximum von ca. 11 mm h^{-1} erreicht. Das parametrische Modell zeigt einen sehr ähnlichen Verlauf der Regenrate, allerdings setzt der Niederschlag früher ein und das Maximum der Regenrate ist mit ca. 9.5 mm h^{-1} niedriger. Dies kann zum Teil auf die von Wacker und Seifert (2001) diskutierten Probleme der Parametrisierung der Sedimentation zurückgeführt werden, da dadurch die integrale Sedimentationsgeschwindigkeit überschätzt wird (siehe Abschnitt 3.5.1, insbesondere Abb. 3.7).

Um einen Überblick über die Anwendbarkeit der Parametrisierung unter verschiedenen Bedingungen, d.h. in Abhängigkeit von der spezifischen Anfangsbedingung, charakterisiert durch L_0 , \bar{r}_0 und ν , zu geben, werden im folgenden insbesondere die maximale Regenrate R_{max} sowie der Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} für verschiedene Simulationen betrachtet.

In Abbildung 3.11 ist für ein Ensemble von Simulationen der Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0

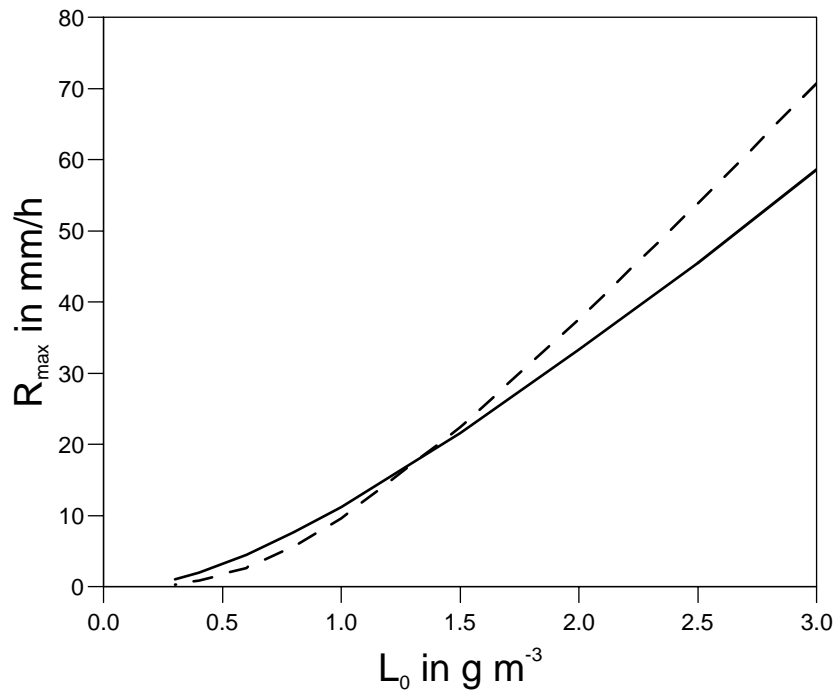


Abbildung 3.12: Wie Abb. 3.11, gezeigt ist jedoch die maximal erreichte Regenrate R_{max} in mm h^{-1} als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0 in g m^{-3} ($\bar{r}_0 = 14 \mu\text{m}$, $\nu = 0$).

in g m^{-3} dargestellt. Wie in Abschnitt 3.3.5 gezeigt, läuft der Koagulationsvorgang umso langsamer ab, je weniger Flüssigwasser zur Verfügung steht. Die maximale Regenrate tritt immer später auf. Wolken mit weniger als 0.5 g m^{-3} Wolkenwassergehalt produzieren zumindest innerhalb von ein bis zwei Stunden keinen signifikanten Niederschlag. Die Parametrisierung kann das zeitliche Verhalten des spektralen Referenzmodells gut reproduzieren. Die zugehörigen maximalen Regenraten sind, ebenfalls als Funktion des Flüssigwassergehalts L_0 , in Abbildung 3.12 dargestellt. Wie zu erwarten nimmt die maximale Regenrate rasch ab, wenn weniger Flüssigwasser zur Verfügung steht. Der Vergleich zwischen Parametrisierung und spektralem Modell zeigt, dass die Parametrisierung die hohen maximalen Regenraten überschätzt und die niedrigen unterschätzt.

Wesentlich interessanter als die Abhängigkeit von L_0 ist die Sensitivität der Wolkenmikrophysik auf Änderungen des mittleren Wolkentropfenradius \bar{r}_0 . Da für kleine Wolkentropfen die Kollisionseffizienz eine maßgebliche Rolle spielt, sind, wie Seifert und Beheng (2000, 2001) gezeigt haben, die gängigen Koagulationsparametrisierungen nicht in der Lage, das zeitliche Verhalten des Koagulationsprozesses für kleine mittlere Wolkentropfenradien korrekt

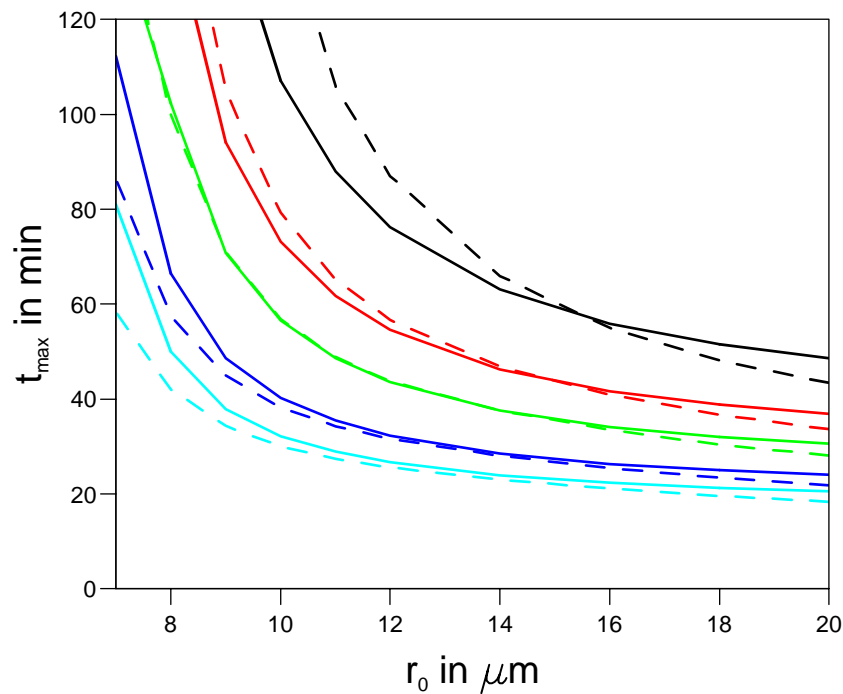


Abbildung 3.13: Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des mittleren Radius der Anfangsbedingung \bar{r}_0 in μm für ein Ensemble von Simulationen mit dem spektralen Modell (—) und der parametrischen Beschreibung (---) ($\nu = 0$; Scharparameter: $L_0 = 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0 \text{ g m}^{-3}$, von oben nach unten).

wiedergzugeben.

In Abbildung 3.13 ist der Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} als Funktion des mittleren Radius der Anfangsbedingung \bar{r}_0 dargestellt, wie er sich aus dem spektralen Referenzmodell und dem Modell mit parametrisierter Koagulation ergibt. Scharparameter ist der Flüssigwassergehalt L_0 mit Werten zwischen 0.5 und 2.0 g m^{-3} . Obwohl zum Teil deutliche Unterschiede zwischen dem spektralen Modell und der Parametrisierung bestehen, ist die Parametrisierung dennoch in der Lage, die Sensitivität auch für $\bar{r}_0 < 10 \mu\text{m}$ zu reproduzieren. Deutliche Unterschiede treten für $L_0 \leq 0.5 \text{ g m}^{-3}$ auf. Abbildung 3.14 zeigt die entsprechenden maximalen Regenraten. Hier erkennt man deutliche Mängel der Parametrisierung: Die hohen Regenraten werden wieder überschätzt und insbesondere für kleine \bar{r}_0 ergeben sich aus dem parametrischen Modell deutlich zu kleine maximale Regenraten. Auch hier ist ein Teil der Probleme auf die Schwierigkeiten der Sedimentationsparametrisierung zurückzuführen. Ein grundsätzliches Problem der Koagulationsparametrisierung, das schon von Seifert und Beheng (2001) ausführlich diskutiert wird, ist jedoch, dass die in Abschnitt 3.3.5

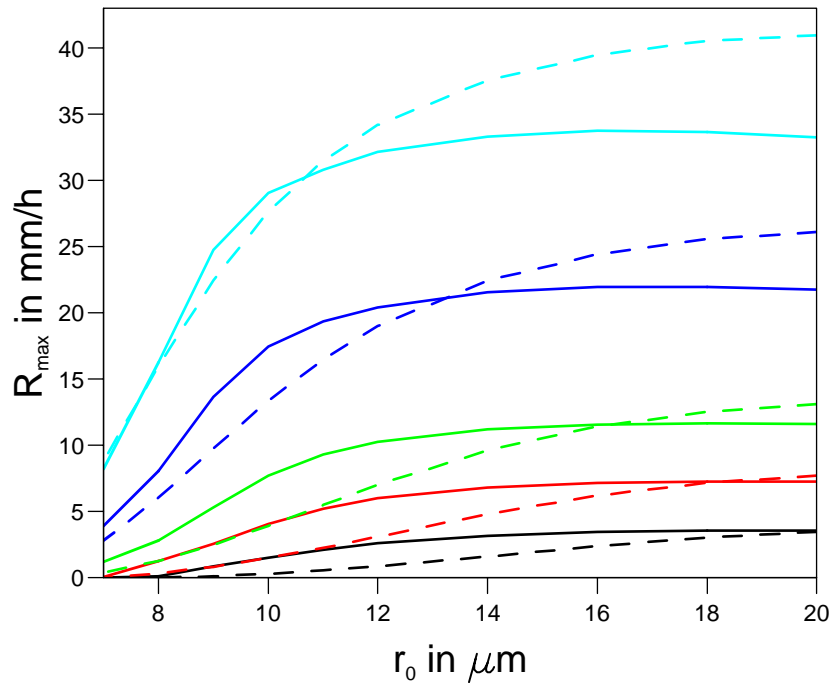


Abbildung 3.14: Wie Abb. 3.13, gezeigt ist jedoch die maximal erreichte Regenrate R_{max} in mm h^{-1} als Funktion des mittleren Radius der Anfangsbedingung \bar{r}_0 in μm ($\nu = 0$; Scharparameter: $L_0 = 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0 \text{ g m}^{-3}$, von unten nach oben).

hergeleiteten Ähnlichkeitsrelationen nur eine Eigenschaft der kinetischen Gleichung sind, jedoch keine Eigenschaft der vollständigen Bilanzgleichung unter Berücksichtigung von Sedimentation und Advektion! Das heißt, dass die Ähnlichkeitsannahme nicht erfüllt ist, wenn der Koagulationsvorgang maßgeblich durch Sedimentation oder Advektion beeinflusst wird. Für Situationen, in denen der Koagulationsprozess sehr langsam abläuft, d.h. insbesondere bei kleinen Flüssigwassergehalten und/oder sehr kleinen mittleren Wolkentropfenradien, wird dem System 'Wolke' bereits während des Koagulationsvorgangs ein signifikanter Anteil der entstehenden Regentropfen entnommen. Dies führt dazu, dass die der Zeitskala τ zu Grunde liegende Ähnlichkeitshypothese nicht erfüllt ist. Dieser, von Seifert und Beheng (2001) 'break-down of τ -similarity' genannte Effekt führt dazu, dass dann größere Differenzen zwischen der Parametrisierung und dem spektralen Modell auftreten. Offensichtlich beeinflusst dies den Zeitpunkt der maximalen Regenrate kaum, die auftretenden Regenraten jedoch deutlich, da durch den beschriebenen Effekt das Niederschlagsereignis länger andauert.

Die Niederschlagsbildung durch Koagulation kann sowohl durch das Zerplatzen großer Tropfen als auch durch die atmosphärische Turbulenz beeinflusst werden. Im folgenden wird

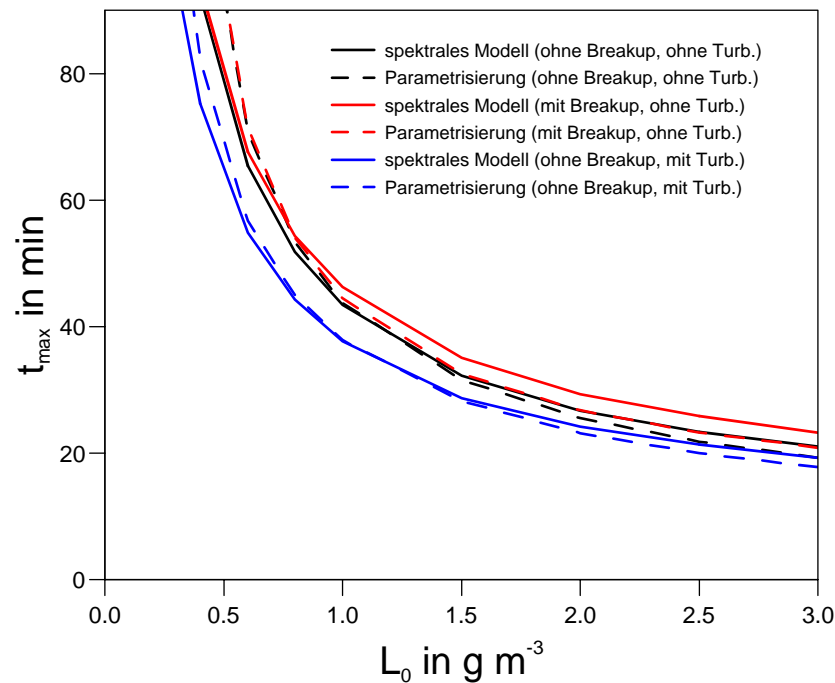


Abbildung 3.15: Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0 in g m^{-3} für ein Ensemble von Simulationen mit dem spektralen Modell (—) und der parametrischen Beschreibung (---) (Schwarz: ohne Turbulenz, ohne Breakup. Rot: mit Breakup, ohne Turbulenz. Blau: mit Turbulenz, ohne Breakup; $\bar{r}_0 = 12 \mu\text{m}$, $\nu = 0$).

die in Abschnitt 2.2.3 beschriebene Abschätzung des Turbulenzeinflusses auf die Kollisionseffizienz nach Pinsky et al. (2000) verwendet. Leider liegen dabei nur Daten für eine turbulente Dissipationsrate von $\epsilon = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ vor. Die Behandlung des Breakup-Vorgangs erfolgt im spektralen Modell gemäß der Formulierung von Low und List (1982a, 1982b). Neben den der kinetischen Gleichung entsprechenden Koagulationstermen treten dann noch zusätzliche Terme auf, die das Zerplatzen der großen Tropfen in kleinere Tropfen beschreiben (siehe Abschnitt 2.3.2 und Mayer, 2000). Das parametrische Modell berücksichtigt den Turbulenzeinfluss auf die Koagulation, insbesondere auf die Autokonversion und den Selbsteinfang der Wolkentropfen durch eine höhere Konstante in der Polynomapproximation der Koagulationsfunktion ($k_{cc,100} = 10.58 \times 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$, siehe Abschnitt 3.3.1). Die Parametrisierung des Breakup-Vorgangs folgt Abschnitt 3.4: In der Bilanzgleichung für die Anzahldichte der

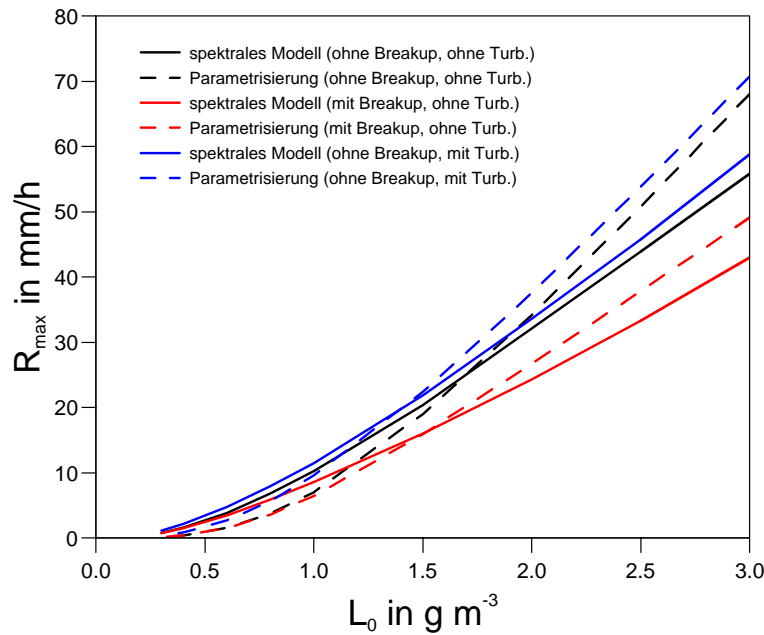


Abbildung 3.16: Wie Abb. 3.15, gezeigt ist jedoch die maximal erreichte Regenrate R_{max} in $mm\ h^{-1}$ als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0 in $g\ m^{-3}$ (Schwarz: ohne Turbulenz, ohne Breakup. Rot: mit Breakup, ohne Turbulenz. Blau: mit Turbulenz, ohne Breakup; $\bar{r}_0 = 12\ \mu m$, $\nu = 0$).

Regentropfen tritt dann ein zusätzlicher Quellterm auf; d.h. statt Gl. (3.133) wird

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} - \frac{\partial[\bar{v}_{N_r}(\bar{x}_r)N_r]}{\partial z} = \frac{1}{x^*} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{au} - \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{sc} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{br} \quad (3.136)$$

mit der Breakup-Parametrisierung

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{br} = [k_{br}(\bar{D}_r - \bar{D}_{eq}) + 1] \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{sc} \quad (3.137)$$

mit $\bar{D}_{eq} = 0.9 \times 10^{-3}\ m$ und $k_{br} = 1 \times 10^3\ m^{-1}$ verwendet.

In Abbildung 3.15 ist wie schon in Abb. 3.11 der Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des Flüssigwassergehalts der Anfangsbedingung L_0 dargestellt. Farblich sind nun die Ergebnisse der beiden Modelle unter Berücksichtigung der Turbulenz (blau) bzw. des Breakups (rot) dargestellt. Wie erwartet bewirkt die Turbulenz durch die erhöhte Kollisionswahrscheinlichkeit der Wolkentropfen eine schnellere Entwicklung, die maximale Regenrate tritt früher auf. Spektrales und parametrisches Modell stimmen hier sehr gut überein. Der Breakup-Prozess bewirkt ein Zerplatzen der großen, schnell fallenden Trop-

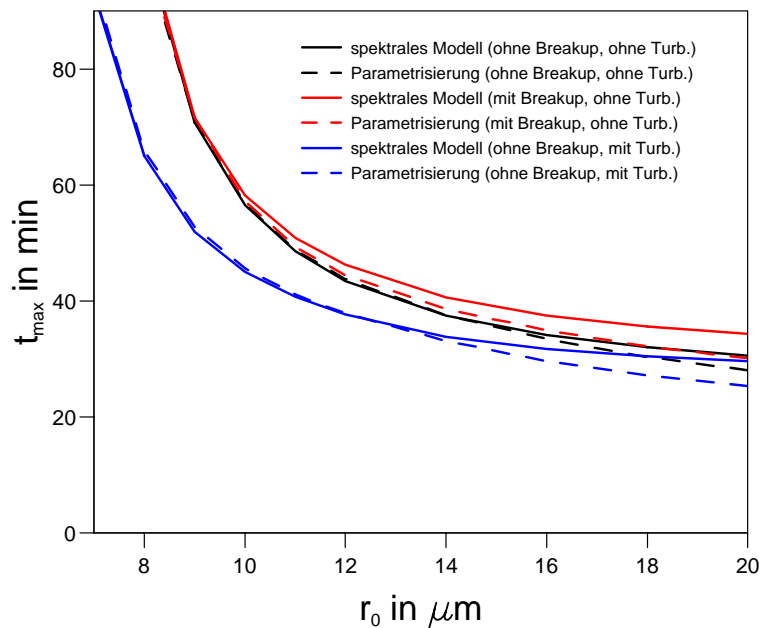


Abbildung 3.17: Zeitpunkt der maximalen Regenrate t_{max} in Minuten als Funktion des mittleren Radius der Anfangsbedingung \bar{r}_0 in μm für ein Ensemble von Simulationen mit dem spektralen Modell (—) und der parametrischen Beschreibung (---) (Schwarz: ohne Turbulenz und Breakup. Rot: mit Breakup, ohne Turbulenz. Blau: mit Turbulenz, ohne Breakup; $L_0 = 1 \text{ g m}^{-3}$, $\nu = 0$).

fen und verlangsamt damit die Koagulation und die Sedimentation. Die maximale Regenrate tritt später auf, was qualitativ beide Modelle sehr ähnlich zeigen. Wie bereits diskutiert, überschätzt das parametrische Modell die Sedimentationsgeschwindigkeit. Die in Abb. 3.16 dargestellte Abhängigkeit der maximalen Regenrate vom Flüssigwassergehalt der Anfangsbedingung L_0 zeigt ebenfalls, dass die verwendeten Parametrisierungen des Turbulenz- und Breakup-Einflusses qualitativ gut mit dem spektralen Modell übereinstimmen. Das Zerplatzen der großen Tropfen führt zu deutlich niedrigeren Regenraten, während der Einfluss der Turbulenz die maximale Regenrate ein wenig erhöht.

Den Einfluss von Turbulenz und Breakup bei verschiedenen mittleren Tropfenradien der Anfangsbedingung zeigt Abb. 3.17. Für sehr kleine Tropfen führt die Turbulenz nach der Abschätzung von Pinsky et al. (2000) zu einer deutlich schnelleren Entwicklung von Niederschlag. Auch hier stimmen spektrales Modell und Parametrisierung sehr gut überein. Der Breakup zeigt seine Wirkung nur bei großen mittleren Tropfenradien, wobei die Parametrisierung den Einfluss etwas unterschätzt. Abb. 3.18 zeigt die Abhängigkeit der maximalen Regenrate vom mittleren Tropfenradius. Wie schon bei Abb. 3.14 diskutiert, zeigen sich hier

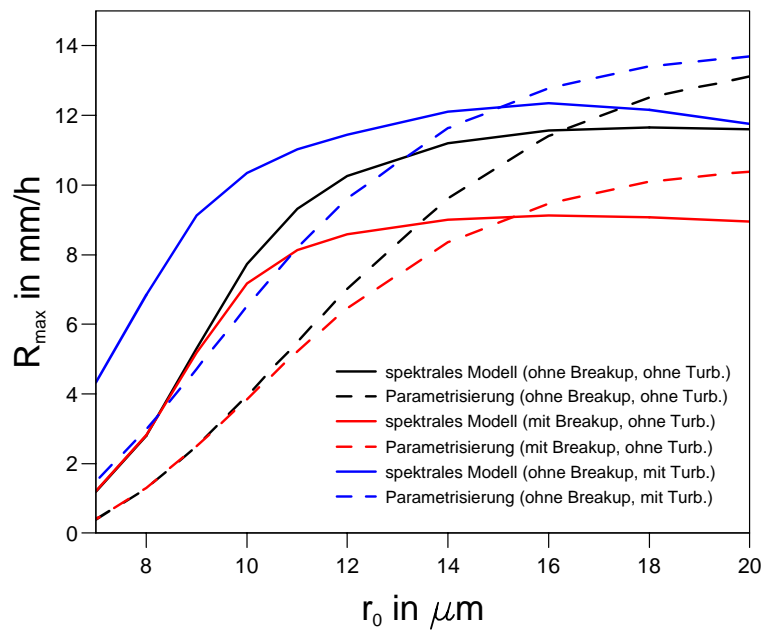


Abbildung 3.18: Wie Abb. 3.17, gezeigt ist jedoch die maximal erreichte Regenrate R_{max} in mm h^{-1} als Funktion des mittleren Radius der Anfangsbedingung \bar{r}_0 in μm (Schwarz: ohne Turbulenz, ohne Breakup. Rot: mit Breakup, ohne Turbulenz. Blau: mit Turbulenz, ohne Breakup; $L_0 = 1 \text{ g m}^{-3}$, $\nu = 0$).

die größten Mängel der Parametrisierung, insbesondere für kleine mittlere Radien. Sieht man über diese Defizite hinweg, so kann die Wirkung der Turbulenz, die die Regenrate insbesondere für kleine mittlere Wolkentropfenradien erhöht, und des Breakups, der die Regenrate nach oben begrenzt, qualitativ gut nachvollzogen werden.

3.7 Parametrisierung von Nukleation, Kondensation und Verdunstung

3.7.1 Nukleation

Wolkentropfen entstehen unter den atmosphärischen Bedingungen immer durch heterogene Nukleation, d.h. durch die Aktivierung von Aerosolpartikeln (sog. cloud condensation nuclei, CCN). Den Zusammenhang zwischen der Anzahl der aktivierten Aerosole, dem Aerosolspektrum und der Übersättigung beschreibt die Köhler-Kelvin-Theorie. Als CCN-Spektrum wird dabei die Anzahldichte der aktivierten Aerosolpartikel als Funktion der Übersättigung bezeichnet. Das CCN-Spektrum kann entweder empirisch bestimmt werden (z.B. Twomey und Wojciechowski, 1969; Hudson und Li, 1995; Pruppacher und Klett, 1997, S. 287-296) oder unter der Annahme einer Größenverteilung und chemischen Zusammensetzung der Aerosolpartikel mittels der Köhler-Kelvin-Theorie berechnet werden (von der Emde und Wacker, 1993; Herbert und Wacker, 1998; Ji und Shaw, 1998; Cohard et al., 1998; Cohard et al., 2000).

Empirische CCN-Spektren werden oft durch ein einfaches Potenzgesetz

$$N_{ccn}(S) = C S^k \quad (3.138)$$

mit Konstanten C und k , die von den Aerosoleigenschaften abhängen, approximiert. Einige Beispiele sind in Tabelle 3.3 aufgeführt. Die gemessenen Spektren weisen jedoch oft eine Krümmung auf, die sich durch einen Potenzansatz nicht wiedergeben lässt. Hudson und Xie (1999) geben deshalb verschiedene Werte von k für ausgewählte Wertebereiche der Übersättigung S an.

Cohard et al. (1998) verwenden CCN-Spektren, die die Hypergeometrische Funktion $F(a, b; c; z)$ enthalten:

$$N_{ccn}(S) = C S^k F\left(\mu, \frac{k}{2}; \frac{k}{2} + 1; -\beta S^2\right). \quad (3.139)$$

Insbesondere unter maritimen Bedingungen lässt sich das CCN-Spektrum durch diese Funktion sehr viel genauer beschreiben als durch ein einfaches Potenzgesetz. Die numerische Auswertung der in Gl. (3.139) auftretenden Hypergeometrischen Funktion ist jedoch sehr aufwendig. Deshalb ist es sinnvoll, in einem dreidimensionalen Atmosphärenmodell eine effizientere Approximation des CCN-Spektrums zu verwenden. Nach Abramowitz und Stegun

Tabelle 3.3: Parameterwerte für ausgewählte empirische Aktivierungsspektren.

Typ	$N_{ccn} = C S^k$		Ort	Quelle / Bemerkung
	C in cm^{-3}	k		
kontinental	6.0×10^2	0.5	Australien, Afrika, USA	Twomey und Wojciechowski (1969)
maritim	1.0×10^2	0.5	Atlantik, Pazifik	Twomey und Wojciechowski (1969)
kontinental	2.20×10^3	0.9	High Plains / USA	Hobbs et al. (1985)
maritim	2.90×10^2	0.7	High Plains / USA	Hobbs et al. (1985)
verschiedene	$0.3\text{-}4.0 \times 10^3$	0.7-0.9	Alpenvorland / Deutschland	Stein et al. (1985), Messflüge in verschiedenen Höhen
kontinental	1.26×10^3	0.308	Texas / USA	Khain et al. (2001)

(1965) gilt für die Hypergeometrische Funktion der Spezialfall

$$F(1, 1; 2; z) = -z^{-1} \ln(1 - z). \quad (3.140)$$

In dem von Cohard et al. (1998) verwendeten Parameterbereich kann deshalb das CCN-Spektrum mit hinreichender Genauigkeit durch einen Ansatz der Form

$$N_{ccn} = C S^k F\left(\mu, \frac{k}{2}; \frac{k}{2} + 1; -\beta S^2\right) \approx \frac{C}{A^k} \ln[(AS)^k + 1] \quad (3.141)$$

approximiert werden, wobei der Parameter A analog zu Abschnitt 3.3.1 durch numerische Minimierung der mittleren Abweichung zu bestimmen ist. In Tabelle 3.4 sind die entsprechenden Parameterwerte für die von Cohard et al. (1998) und Cohard et al. (2000) angegebenen CCN-Spektren aufgeführt.

Um aus einem gegebenen CCN-Spektrum die Änderung der Anzahldichte der Wolkentropfen durch Aktivierung zu erhalten, muss gemäß der Lagrangeschen Betrachtungsweise die substantielle Änderungsrate

$$\left. \frac{dN_c}{dt} \right|_{\text{nuc}} = \begin{cases} \frac{\partial N_{ccn}(S)}{\partial S} \frac{dS}{dt}, & \text{für } S > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.142)$$

berechnet werden (Khain et al., 2000). Oft wird jedoch ein einfacheres lokales und quasi-

Tabelle 3.4: Parameterwerte für Aktivierungsspektren $N_{ccn}(S)$ nach Cohard et al. (1998) und Cohard et al. (2000).

Typ	$N_{ccn} = C S^k$		$N_{ccn} = C S^k F\left(\mu, \frac{k}{2}; \frac{k}{2} + 1; -\beta S^2\right)$				$N_{ccn} = \frac{C}{A^k} \ln[(AS)^k + 1]$			Bemerkung
	C in cm^{-3}	k	C in cm^{-3}	k	β	μ	C in cm^{-3}	k	A	
continental	-	-	3.270×10^3	1.56	136	0.70	3.270×10^3	1.56	8.904	Cohard et al. (1998), synthetic $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ -dataset
continental	-	-	1.735×10^3	1.403	25.499	0.834	1.735×10^3	-	-	Cohard et al. (2000), synthetic $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ -dataset nach von der Emde und Wacker (1993)
maritime	-	-	1.93×10^8	4.16	1370	2.76	1.93×10^8	4.16	62.82	Cohard et al. (1998), synthetic NaCl -dataset
maritime	-	-	2.1986×10^6	3.251	621.689	2.589	2.1986×10^6	-	-	Cohard et al. (2000), synthetic NaCl -dataset nach von der Emde und Wacker (1993)
maritime, clean air	0.243×10^3	1.57	1.104×10^3	2.07	6.84	1.90	1.104×10^3	2.07	5.442	Cohard et al. (1998), experimental dataset (Hudson und Li, 1995)
maritime, polluted air	0.986×10^3	0.64	1.865×10^3	0.86	6.80	1.50	1.865×10^3	0.86	6.947	Cohard et al. (1998), experimental dataset (Hudson und Li, 1995)

diagnostisches Schema verwendet (z.B. Hall, 1980):

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} = \begin{cases} \frac{N_{ccn}(S) - N_c}{\Delta t}, & \text{falls } S \geq 0 \text{ und } N_c < N_{ccn}(S) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.143)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} = x_{c,\text{nuc}} \left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{nuc}}. \quad (3.144)$$

Dabei ist $x_{c,\text{nuc}} = 1 \times 10^{-12}$ kg eine willkürlich angenommene Masse der Wolkentropfen bei Nukleation. Problematisch hierbei ist, dass die Übersättigung S empfindlich von der Vertikalgeschwindigkeit und damit auch von der durch die Numerik noch aufgelösten räumlichen Skala abhängt. Cohard et al. (1998) empfehlen daher in mesoskaligen Atmosphären- bzw. Wolkenmodellen die Verwendung der so genannten Twomey-Gleichungen, um die explizite Berechnung der Übersättigung zu vermeiden (Twomey, 1959). Das Twomey-Modell und ein statistisches Verfahren zu Berechnung der Übersättigung diskutiert auch Chen (1993). Im folgenden wird jedoch das einfachere quasi-diagnostische Verfahren verwendet, auch weil die Anwendung der anderen Schemata, insbesondere der Twomey-Gleichungen auf Mischwolken sehr aufwendig ist, da dann zusätzliche Terme zu berücksichtigen sind (Chen, 1993). Für die Eiskondensation wird meist ebenfalls das einfache quasi-diagnostische Schema verwendet (siehe Reisner et al., 1998 und Abschnitt 4.4.1).

3.7.2 Kondensation

Das Kondensationswachstum der Wolkentropfen wird in den meisten Wolkenmodellen mit parametrisierter Wolkenmikrophysik durch eine Sättigungsadjustierung realisiert (siehe z.B. Reisner et al., 1998, Cohard und Pinty, 2000a). Dies kann dadurch gerechtfertigt werden, dass das Kondensationswachstum der Wolkentropfen sehr schnell abläuft und sich deshalb die beiden Phasen stets nahezu im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Kogan und Martin (1994) diskutieren diese Annahme unter verschiedenen atmosphärischen Bedingungen und kommen zu dem Ergebnis, dass nur bei extrem maritimen Bedingungen, wenn die Anzahldichte der Wolkentropfen sehr klein ist, signifikante Abweichungen von einer expliziten Behandlung der Kondensation auftreten.

Reinecke und Beheng (1996) geben eine integrale Formulierung der Kondensationsrate an, die prinzipiell eine explizite Behandlung der Kondensation in Abhängigkeit von den mittleren Eigenschaften des Wolkentropfenspektrums ermöglicht. Die Kondensationsrate ist dann

durch

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{kond}} = \int_0^{\infty} f_c(x) \dot{x} dx = C(\tilde{r}_c) \frac{4\pi D_v}{R_d T} p_{wd}(T) (S \tilde{M}_c^1 - \alpha_{\text{kond}} \tilde{M}_c^0 + \beta_{\text{kond}} \tilde{M}_c^{-2}) \quad (3.145)$$

mit

$$\alpha_{\text{kond}} = \frac{2\sigma_w}{R_d T \rho_w} \quad (3.146)$$

$$\beta_{\text{kond}} = \frac{3i_H \bar{m}_w M_s}{4\pi \bar{m}_s \rho_w} \quad (3.147)$$

gegeben. Dabei ist M_s die Masse der Salzpartikel, \bar{m}_s das mittlere Molekulargewicht des Salzes, \bar{m}_w das Molekulargewicht von Wasser und i_H der van't Hoff-Faktor. Die \tilde{M}_c^k sind partielle Momente der Wolkentropfenanzahldichteverteilungsfunktion bzgl. des Durchmessers $f_c(D)$, die in Gl. (3.145) auf Grund der Abhängigkeiten $\sim D$ bzw. $\sim D^{-2}$ auftreten:

$$\tilde{M}_c^k = \int_{r_{act}(S)}^{\infty} f_c(D) D^k dD. \quad (3.148)$$

Aufwendig wird diese Parametrisierung dadurch, dass der Aktivierungsradius $r_{act}(S)$ eine Funktion der Übersättigung S ist. Der Korrekturfaktor

$$C(\tilde{r}_c) = K_v(\tilde{r}_c) H(\tilde{r}_c) f_v(\tilde{r}_c) \quad (3.149)$$

beinhaltet die Knudsen-Korrektur $K_v(\tilde{r}_c)$, den Howell-Faktor $H(\tilde{r}_c)$ und den Ventilationskoeffizienten $f_v(\tilde{r}_c)$ (für Details siehe Reinecke und Beheng, 1996). Der Radius \tilde{r}_c kann durch den Radius approximiert werden, für den die Anzahldichteverteilung $f_c(x)$ maximal wird.

Insbesondere auf Grund der partiellen Momente \tilde{M}_c^k ist der Rechenaufwand für diese Integraldarstellung der Kondensationsrate sehr hoch. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb die einfachere Sättigungsadjustierung verwendet. Hierzu wird das von Doms und Herbert (1985) beschriebene Näherungsverfahren angewandt (auch Dotzek, 1999). Als Alternative ist das Verfahren nach Soong und Ogura (1973) implementiert.

3.7.3 Die Verdunstung der Regentropfen

Näherungsweise kann die Verdunstung von Regentropfen durch

$$\left. \frac{\partial x_r}{\partial t} \right|_{\text{eva}} = \frac{2\pi D_r(x_r) f_v(x_r) S}{\frac{R_d T}{\rho_{wd}(T) D_v} + \frac{L_{wd}}{K_T T} \left(\frac{L_{wd}}{R_d T} - 1 \right)} = 2\pi D_r(x_r) G_{wd}(T, p) f_v(x_r) S \quad (3.150)$$

beschrieben werden (siehe z.B. Flatau et al., 1989). Eine Diskussion der dabei verwendeten Näherungen geben Pruppacher und Klett (1997, S. 537-545). Der Ventilationskoeffizient $f_v(x)$ kann für sphärische Partikel nach Beard und Pruppacher (1971) und Pruppacher und Rasmussen (1979) durch

$$f_v = a_v + b_v N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2} \quad (3.151)$$

mit der Schmidt-Zahl $N_{Sc} = \nu_a / D_v = 0.71$ und den Koeffizienten $a_v = 0.78$ und $b_v = 0.308$ parametrisiert werden (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 541). Dabei ist

$$N_{Re}(x_r) = \frac{v_r(x_r) D_r(x_r)}{\nu_a} \quad (3.152)$$

die Reynolds-Zahl eines Regentropfens, die nur noch von der Tropfenmasse abhängt. Die Änderung der Momente der Größenverteilungsfunktion $f_r(x_r)$ durch die Verdunstung kann dann mit der charakteristischen Zeitskala, gebildet aus der Tropfenmasse und der Änderungsrate,

$$\tau_{\text{eva}} = \frac{x_r}{\frac{dx_r}{dt}} = \frac{1}{2\pi G_{wd}(T, p) S} \frac{x_r}{D_r(x_r) f_v(x_r)} \quad (3.153)$$

durch

$$\left. \frac{\partial M_r^n}{\partial t} \right|_{\text{eva}} = \int_0^\infty \frac{x^n f_r(x)}{\tau_{\text{eva}}} dx = 2\pi G_{wd}(T, p) S \int_0^\infty D_r(x) f_v(x) f_r(x) x^{n-1} dx \quad (3.154)$$

abgeschätzt werden. Dieses Integral kann für eine verallgemeinerte Gamma-Verteilung leicht ausgewertet werden. Man erhält

$$\left. \frac{\partial M_r^n}{\partial t} \right|_{\text{eva}} = 2\pi G_{wd}(T, p) S D_r(\bar{x}_r) \bar{f}_{v,n}(\bar{x}_r) \bar{x}_r^{n-1} \quad (3.155)$$

mit dem mittleren Ventilationskoeffizienten des n -ten Moments

$$\bar{f}_{v,n}(\bar{x}) = \bar{a}_{\text{vent},n} + \bar{b}_{\text{vent},n} N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2}(\bar{x}), \quad (3.156)$$

der mittleren Reynolds-Zahl

$$N_{Re}(\bar{x}) = \frac{v(\bar{x})D(\bar{x})}{\nu_a} \quad (3.157)$$

und den Koeffizienten

$$\bar{a}_{vent,n} = a_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+n+b_r}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+2}{\mu_r}\right)} \right]^{b_r+n-1} \quad (3.158)$$

$$\bar{b}_{vent,n} = b_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+n+\frac{3}{2}b_r+\frac{1}{2}\beta_r}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r+1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r+2}{\mu_r}\right)} \right]^{\frac{3}{2}b_r+\frac{1}{2}\beta_r+n-1} \quad (3.159)$$

(vgl. Abschnitt 4.4.4). Für die Änderungsraten der Anzahl- und Massendichte ergibt sich

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{eva} = 2\pi G_{wd}(T, p) S D_r(\bar{x}_r) \bar{f}_{v,0}(\bar{x}_r) \bar{x}_r^{-1} \quad (3.160)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{eva} = 2\pi G_{wd}(T, p) S D_r(\bar{x}_r) \bar{f}_{v,1}(\bar{x}_r) \quad (3.161)$$

mit $\bar{x}_r = L_r/N_r$. Damit sind alle wolkenmikrophysikalischen Prozesse der flüssigen Phase im Rahmen eines Zwei-Momenten-Schemas parametrisiert. Im nächsten Kapitel werden Prozesse betrachtet, die bei der Berücksichtigung von Eis auftreten.

Kapitel 4

Integrale Formulierung der Wolkenmikrophysik.

Teil II: Eisphase

4.1 Grundlagen und Begriffe

Eine integrale Beschreibung der Kollisionswechselwirkungen in Mischwolken könnte prinzipiell analog zu dem für die Parametrisierung der flüssigen Phase in Kapitel 3 erarbeiteten Formalismus erfolgen, d.h. durch analytische Approximation der diversen Koagulationsfunktionen. Dabei ist allerdings nicht zu erwarten, dass in jedem Fall einfache Polynomapproximationen bereits eine hinreichende Genauigkeit gewährleisten. Hier soll deshalb ein anderer, mehr an den üblichen Methoden orientierter Weg eingeschlagen werden.

Einfache Kombinatorik zeigt, dass die Berücksichtigung zusätzlicher Partikelarten wie z.B. Schnee oder Graupel die Anzahl der möglichen Kollisionswechselwirkungen drastisch erhöht. Betrachtet man nur binäre Kollisionen, so ist die Anzahl der Kollisionswechselwirkungen eines n -komponentigen Systems durch

$$Ko_2^n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4.1)$$

gegeben. Für fünf Partikelarten sind dies 15 verschiedene Kollisionswechselwirkungen. Bereits diese Überlegung zeigt, dass die Berücksichtigung der Eisphase den Aufwand - sowohl für die theoretische Beschreibung als auch für die numerische Simulation selbst - drastisch erhöht. Es ist deshalb notwendig, einfache und allgemein anwendbare Parametrisierungen

der Wechselwirkungen zu formulieren. Im folgenden werden die zur Zeit üblichen Methoden dargestellt und es wird eine verbesserte Parametrisierung vorgeschlagen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Beschreibung der Eisphase drei Partikelklassen verwendet: Wolkeneis in Form von hexagonalen oder auch säulenförmigen Kristallen. Die Annahme hexagonaler Plättchen kann dadurch gerechtfertigt werden, dass der größte Teil des Depositionswachstums im Temperaturbereich von -8 bis -15 °C erfolgt (Ovtchinnikov und Kogan, 2000). Neben Wolkeneis werden noch Schneeflocken berücksichtigt, die sich durch Aggregation der Eiskristalle bilden und Graupel, der durch das Bereifen von Wolkeneis oder Schnee entsteht. Dies entspricht der bereits von Lin et al. (1983), Cotton et al. (1986) und Geresdi (1990) verwendeten Einteilung der Partikelklassen. Rutledge und Hobbs (1984), Murakami (1990) und Reisner et al. (1998) verwenden ebenfalls diese drei Eisklassen, wobei deren Schneeklasse sowohl große Kristalle (Schneekristalle) als auch Aggregate (Schneeflocken) beinhaltet. Harrington et al. (1995) unterscheiden vier Eisklassen: Eiskristalle ('pristine ice'), Schnee ('snow'), Schneeflocken ('aggregated crystals') und Graupel ('graupel'). Dabei entsteht Schnee ausschließlich durch Depositionswachstum von Eiskristallen. Walko et al. (1995) und Meyers et al. (1997) verwenden sogar fünf Eisklassen, da zusätzlich noch zwischen Graupel und Hagel unterschieden wird. Ferrier (1994) und Ferrier et al. (1994) verwenden die vier Eisklassen: Eiskristalle, Schnee, Graupel und Hagel.

Im Gegensatz zu den genannten Arbeiten werden im folgenden allerdings die drei hier berücksichtigten Partikelklassen mit zwei prognostischen Variablen, d.h. durch die Anzahl- und die Massendichte des Partikelensembles, beschrieben. In einigen der genannten Arbeiten wird ein Teil der Partikelklassen, meist Wolkeneis oder Schnee, mit zwei Variablen behandelt (Cotton et al., 1986; Murakami, 1990; Ferrier, 1994; Ferrier et al., 1994; Harrington et al., 1995; Meyers et al., 1997; Reisner et al., 1998). Die konsequente Anwendung des Zwei-Variablen-Konzepts auf alle Partikelarten ist bislang jedoch in keinem Mischwolkenchema verwirklicht.

Die unterschiedlichen wolkenmikrophysikalischen Eigenschaften der Partikel werden im Rahmen einer parametrisierten Wolkenmikrophysik von Wacker (2000b) diskutiert.

Außer den Kollisionswechselwirkungen treten bei der Berücksichtigung der Eisphase noch weitere zusätzliche wolkenmikrophysikalische Prozesse auf:

- Durch verschiedene Nukleationsprozesse entstehen Eispartikel aus der Dampfphase (Depositions-Kondensations-Nukleation) oder der flüssigen Phase (z.B. Kontaktnukleation, Immersionsnukleation). Die Immersionsnukleation wird auch als heterogenes Gefrieren bezeichnet. Homogenes Gefrieren, d.h. Gefrieren von Tropfen ohne die Be-

teilung von Aerosolen, tritt erst bei sehr niedrigen Temperaturen auf (siehe Abschnitt 4.4.1).

- Wasserdampfdeposition auf Eisteilchen: Phasenübergang Wasserdampf-Eis an existierenden Eisteilchen. Der umgekehrte Vorgang heißt Sublimation (siehe Abschnitt 4.4.2).
- Aggregation: Vereinigung von Eispartikeln durch Anfriren oder Verhaken. Die Aggregation von Wolkeneispartikeln führt zur Bildung von Schneepartikeln.
- Bereifen: Anfriren von eingesammelten Wolken- oder Regentropfen an Eisteilchen. Bereifen führt zur Bildung von Graupel. Die Partikelklassen Wolkeneis und Schnee können jedoch auch schwach bereifte Partikel enthalten (siehe Abschnitt 4.4.3).
- Schmelzen: Bei Temperaturen über 0 °C findet die Phasenumwandlung von Eis zu Flüssigwasser statt. Aus Wolkeneis entstehen Wolkentropfen; aus Schnee und Graupel entstehen Regentropfen (siehe Abschnitt 4.4.4).

Die wichtigsten Wechselwirkungen zwischen den fünf verwendeten Partikelklassen Wolkentropfen, Regentropfen, Wolkeneis, Schnee und Graupel und dem gasförmigen Wasserdampf sind außerdem in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

4.2 Kollisionswechselwirkungen in Mischwolken

4.2.1 Formulierung der integralen Wachstumsgleichungen

Ausgehend von der spektralen Formulierung mittels Anzahldichteverteilungsfunktionen können für alle Kollisionswechselwirkungen integrale Wachstums- bzw. Aggregationsgleichungen hergeleitet werden, die die Änderungsraten der Momente und damit insbesondere der Anzahl- und Massendichten beschreiben. So kann z.B. das Bereifen von Eispartikeln durch Einfang von Wolkentropfen analog zu Beheng (1978) (siehe auch Abschnitt 2.3.3, Gl. (2.113)-

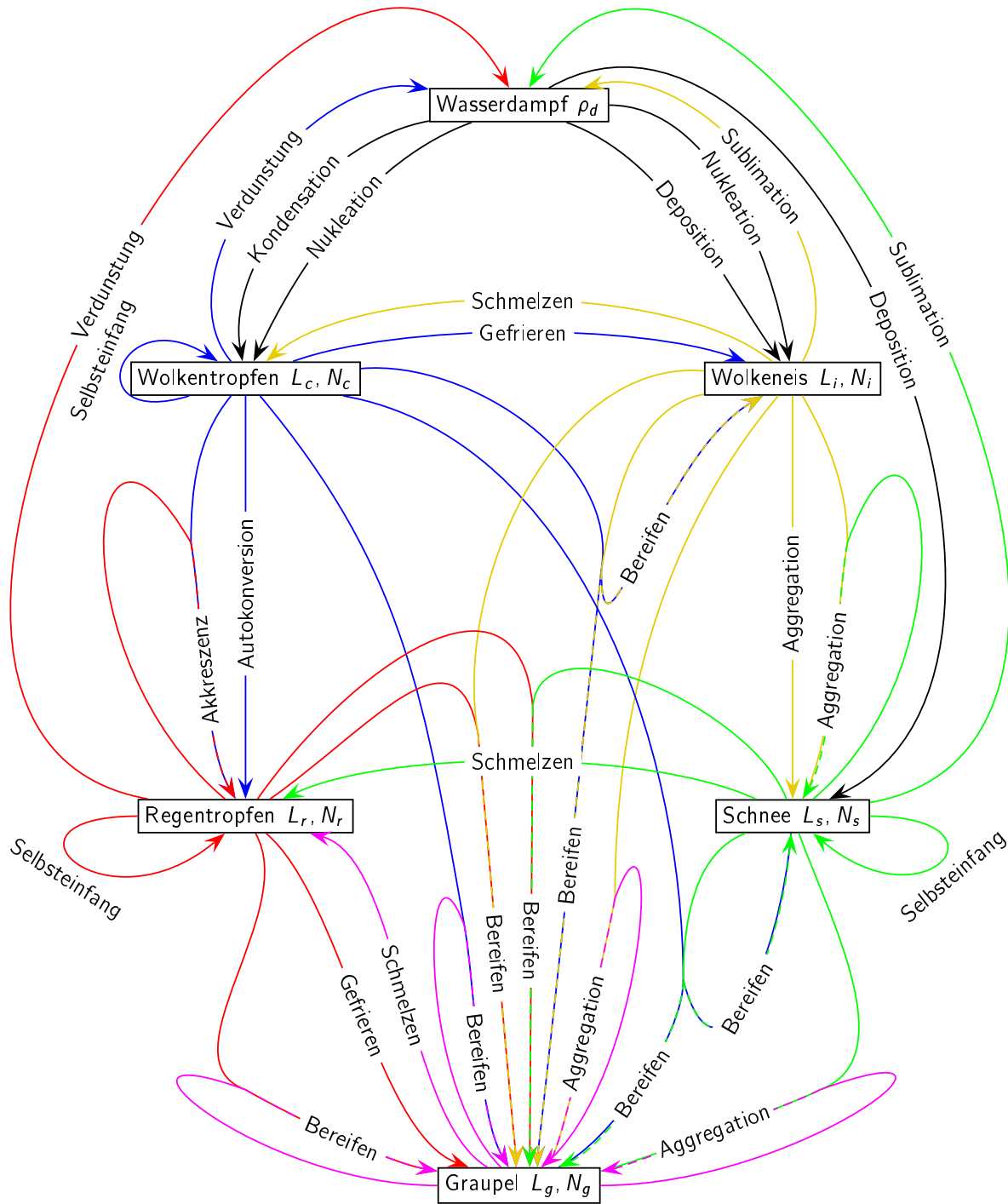


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der wolkenmikrophysikalischen Wechselwirkungen bei Berücksichtigung der Partikelklassen Wolken- und Regentropfen, Wolkeneis, Schnee und Graupel.

(2.115)) formal durch

$$\left. \frac{\partial f_c(x)}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = - \int_0^{\infty} f_c(x) f_i(x') K_{ic}(x, x') dx' \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} &= + \int_0^x f_i(x-x') f_c(x') K_{ic}(x-x', x') dx' - \int_0^{\infty} f_i(x) f_c(x') K_{ic}(x, x') dx' \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x') f_c(x'') K_{ic}(x, x') [\delta(x' + x'' - x) - \delta(x - x')] dx' dx'' \end{aligned} \quad (4.3)$$

beschrieben werden. Der Index ic bezeichnet hierbei die Kollisionswechselwirkung zwischen Wolkeneis und Wolkentropfen. Durch Multiplikation mit x^k und Integration über x erhält man hieraus die integralen Wachstumsgleichungen für die Momente der Anzahldichteverteilungen:

$$\left. \frac{\partial M_c^k}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x_i) f_c(x_c) K_{ic}(x_i, x_c) x_c^k dx_c dx_i \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial M_i^k}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x_i) f_c(x_c) K_{ic}(x_i, x_c) [(x_i + x_c)^k - x_i^k] dx_c dx_i \quad (4.5)$$

oder im einzelnen für die im folgenden relevanten Anzahl- und Massendichten der Wolkentropfen und Eispartikel:

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x_i) f_c(x_c) K_{ic}(x_i, x_c) dx_c dx_i \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = 0 \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x_i) f_c(x_c) K_{ic}(x_i, x_c) x_c dx_c dx_i \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ic} = + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(x_i) f_c(x_c) K_{ic}(x_i, x_c) x_c dx_c dx_i. \quad (4.9)$$

Die Kollisionsfunktion für die Wechselwirkung Eispartikel-Wolkentropfen ist dabei wie folgt zu definieren (siehe Abschnitt 2.2.3):

$$K_{ic}(x_i, x_c) = A_{ic}(x_i, x_c) E_{ic}(x_i, x_c) |v_i(x_i) - v_c(x_c)|. \quad (4.10)$$

Dabei sind $v_i(x_i)$ und $v_c(x_c)$ die Sedimentationsgeschwindigkeiten der Eispartikel und der Wolkentropfen und A ist die Querschnittsfläche des Volumens, in dem die Eispartikel alle Wolkentropfen einsammeln. Für sphärische Eisteilchen wie z.B. Graupel ist

$$A_{gc}(x_g, x_c) = \frac{\pi}{4} [D_g(x_g) + D_c(x_c)]^2 \quad (4.11)$$

und damit

$$K_{gc}(x_g, x_c) = \frac{\pi}{4} [D_g(x_g) + D_c(x_c)]^2 |v_g(x_g) - v_c(x_c)| E_{gc}(x_c, x_g). \quad (4.12)$$

Hingegen gilt für hexagonale Plättchen (mit $D_i(x_i) =$ maximaler Durchmesser)

$$A_{ic}(x_i, x_c) = 6\sqrt{3} [D_i(x_i) + D_c(x_c)]^2 \approx \frac{0.83\pi}{4} [D_i(x_i) + D_c(x_c)]^2 \quad (4.13)$$

und für Eiskristalle in Form von einfachen Säulen (mit Seitenlängen \hat{a}_i und \hat{c}_i)

$$A_{ic}(x_i, x_c) = [\hat{a}_i(x_i) + D_c(x_c)][\hat{c}_i(x_i) + D_c(x_c)] \quad (4.14)$$

(siehe z.B. Cotton und Anthes, 1989, S. 111). Neben der Querschnittsfläche und der Differenz der Fallgeschwindigkeiten geht in die Kollisionsfunktion noch die Kollisions- bzw. Aggregationseffizienz ein (siehe Abschnitt 2.2.4). Für die Verteilungsfunktionen werden üblicherweise Gamma-Verteilungen postuliert, wobei als innere Koordinaten sowohl der Durchmesser als auch die Masse in Betracht kommen. Im folgenden wird meist die in Anhang A dargestellte verallgemeinerte Gamma-Verteilung verwendet.

Eine analytische Auswertung der integralen Wachstumsgleichungen (4.6)-(4.9) mit der Koagulationsfunktion (4.10) ist leider mühsam; insbesondere zwingt die Betragsbildung der Fallgeschwindigkeitsdifferenz im Allgemeinen zu einer Aufspaltung der Integrale, was dann die Integration sehr erschwert. Für Fallgesetze, die einem Potenzansatz folgen, ist es Verlinde et al. (1990) trotz dieser Schwierigkeiten gelungen, die allgemeine Lösung abzuleiten (siehe auch Mizuno, 1990). Dabei treten jedoch uneigentliche Integrale der unvollständigen Gamma-Funktionen oder die allgemeine Hypergeometrische Funktion auf. Dies führt stets auf Ausdrücke, deren numerische Auswertung nicht einfacher ist als die direkte numerische Integration der Integralterme. Um einfache, explizite Gleichungen für die Wachstumsraten zu erhalten, ist es demnach notwendig, physikalisch sinnvoll zu approximieren. Leider existiert

bislang keine Näherung, die in allen Fällen befriedigende Ergebnisse liefert. Insbesondere ist es kaum möglich, den Einfluss der Kollisionseffizienz zu berücksichtigen. Aber auch mit der vereinfachenden Annahme einer konstanten mittleren Kollisionseffizienz führen die üblichen Näherungen nur für 'gutartige' Fälle zu einer korrekten Beschreibung der Kollisionswechselwirkung. Im folgenden wird das so genannte kontinuierliche Wachstumsmodell ('continuous growth model') diskutiert (Kessler, 1969; Lin et al., 1983), anschließend die so genannte Wisner-Approximation (Wisner et al., 1972).

4.2.2 Das kontinuierliche Modell

Das kontinuierliche Modell geht von der Anschauung aus, dass große, schnell fallende Teilchen sehr kleine, sehr langsam fallende einsammeln. Vorstellen kann man sich hier z.B. große Regentropfen oder Graupel- bzw. Hagelteilchen, die Wolkentropfen einsammeln. In diesen Fällen ist es gerechtfertigt, sowohl den Durchmesser als auch die Fallgeschwindigkeit der Wolkentropfen in der Kollisionsfunktion zu vernachlässigen. Mit der weiteren Annahme $E(x, y) = \bar{E}$ ist die Kollisionsfunktion dann nur noch eine Funktion der Masse des großen Partikels, also für das Beispiel der Graupel-Wolkentropfen-Wechselwirkung der Graupelteilchenmasse:

$$K_{gc}(x_g, x_c) = \frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} D_g^2(x_g) v_g(x_g). \quad (4.15)$$

Dabei ist \bar{E}_{gc} die Kollisionseffizienz zwischen Graupel und Wolkentropfen, D_g bzw. v_g sind der Durchmesser bzw. die Sedimentationsgeschwindigkeit der Graupelpartikel. Der Index gc bezeichnet im weiteren die Kollisionswechselwirkung zwischen Graupel und Wolkentropfen. Aus den integralen Wachstumsgleichungen

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = - \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) K_{gc}(x_g, x_c) dx_c dx_g \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = - \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) K_{gc}(x_g, x_c) x_c dx_c dx_g \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = + \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) K_{gc}(x_g, x_c) x_c dx_c dx_g \quad (4.18)$$

folgt damit

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) D_g^2(x_g) v_g(x_g) dx_c dx_g \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) D_g^2(x_g) v_g(x_g) x_c dx_c dx_g \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = +\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_c(x_c) D_g^2(x_g) v_g(x_g) x_c dx_c dx_g. \quad (4.21)$$

Und die Integration über die Wolkentropfenmasse kann nun sofort, ohne Spezifikation einer bestimmten Verteilungsfunktion für die Wolkentropfen, ausgeführt werden:

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} N_c \int_0^\infty D_g^2(x_g) v_g(x_g) f(x_g) dx_g \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} L_c \int_0^\infty D_g^2(x_g) v_g(x_g) f(x_g) dx_g \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = +\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} L_c \int_0^\infty D_g^2(x_g) v_g(x_g) f(x_g) dx_g. \quad (4.24)$$

Um das Integral über x_g auszuwerten, müssen Durchmesser und Fallgeschwindigkeit der Graupelpartikel und auch die Form der Verteilungsfunktion spezifiziert werden. Mit Potenzansätzen für die Fallgeschwindigkeit und die Durchmesser-Masse-Beziehung

$$v_g(x_g) = \alpha_g x_g^{\beta_g}, \quad D_g(x_g) = a_g x_g^{b_g}$$

sowie der Verteilungsfunktion

$$f_g(x_g) = A_g x_g^{\nu_g} \exp[-\lambda_g x_g^{\mu_g}]$$

ergibt sich z.B.:

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = \frac{\pi}{4} \bar{E}_{gc} L_c \alpha_g a_g^2 A_g \int_0^\infty x_g^{\nu_g+2b_g+\beta_g} \exp[-\lambda_g x_g^{\mu_g}] dx_g. \quad (4.25)$$

Und mit (A.4) folgt

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{\nu_g+2b_g+\beta_g+1}{\mu_g})}{\Gamma(\frac{\nu_g+1}{\mu_g})} \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu_g+1}{\mu_g})}{\Gamma(\frac{\nu_g+2}{\mu_g})} \right]^{2b_g+\beta_g} L_c N_g \bar{E}_{gc} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g) \quad (4.26)$$

oder vereinfachend für eine Gamma-Verteilung in x

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\nu_g + 2b_g + \beta_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2b_g+\beta_g} \Gamma(\nu_g + 1)} L_c N_g \bar{E}_{gc} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g). \quad (4.27)$$

Für die Exponential-Verteilung in D erhält man mit $\nu_g = -2/3$ und $\mu_g = 1/3$

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_g + 3\beta_g + 1)}{6^{2b_g+\beta_g}} N_c N_g \bar{E}_{gc} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g) \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = -\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_g + 3\beta_g + 1)}{6^{2b_g+\beta_g}} L_c N_g \bar{E}_{gc} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g) \quad (4.29)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gc} = +\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_g + 3\beta_g + 1)}{6^{2b_g+\beta_g}} L_c N_g \bar{E}_{gc} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g). \quad (4.30)$$

Das kontinuierliche Modell ist eine hinreichend gute Approximation für die Beschreibung des Einfangs von Wolkentropfen durch schnell fallende große Partikel wie z.B. Graupel. Für die Wechselwirkung Graupel-Regentropfen ist diese Näherung im Allgemeinen nicht geeignet, da in diesem Fall weder die Größe noch die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen vernachlässigbar sind. Approximationen, die für solche Wechselwirkungen geeignet sind, werden in den nächsten Abschnitten betrachtet. Hier sei noch der Spezialfall diskutiert, dass große Regentropfen mit sehr kleinen Graupelpartikeln kollidieren. Als Produkt dieser Wechselwirkung entstehen gefrorene Tropfen, die Graupel- oder Hagelembryos bilden und damit der Graupelkategorie zugerechnet werden. Sind die Graupelpartikel hinreichend klein, so kann diese Wechselwirkung ebenfalls durch das kontinuierliche Wachstumsmodell beschrieben werden. Ausgehend von

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},gr} = - \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_r(x_r) K_{gr}(x_g, x_r) dx_r dx_g \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},gr} = - \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_r(x_r) K_{gr}(x_g, x_r) x_r dx_r dx_g \quad (4.32)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},gr} = + \int_0^\infty \int_0^\infty f_g(x_g) f_r(x_r) K_{gr}(x_g, x_r) x_r dx_r dx_g \quad (4.33)$$

erhält man analog zu obiger Rechnung zunächst

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g \int_0^{\infty} D_r^2(x_r) v_r(x_r) f(x_r) dx_r \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g \int_0^{\infty} D_r^2(x_r) v_r(x_r) f(x_r) x_r dx_r \quad (4.35)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = +\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g \int_0^{\infty} D_r^2(x_r) v_r(x_r) f(x_r) x_r dx_r. \quad (4.36)$$

Für eine Gamma-Verteilung in x ergibt sich z.B.

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\nu_r + 2b_r + \beta_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{2b_r + \beta_r + 1} \Gamma(\nu_r + 1)} N_g L_r \bar{E}_{gr} D_r^2(\bar{x}_r) v_r(\bar{x}_r) \quad (4.37)$$

und für den Fall einer Exponential-Verteilung in D

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_r + 3\beta_r + 1)}{6^{2b_r + \beta_r}} N_g N_r \bar{E}_{gr} D_r^2(\bar{x}_r) v_r(\bar{x}_r) \quad (4.38)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_r + 3\beta_r + 4)}{6^{2b_r + \beta_r + 1}} N_g L_r \bar{E}_{gr} D_r^2(\bar{x}_r) v_r(\bar{x}_r) \quad (4.39)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gc}} = +\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(6b_r + 3\beta_r + 4)}{6^{2b_r + \beta_r + 1}} N_g L_r \bar{E}_{gr} D_r^2(\bar{x}_r) v_r(\bar{x}_r). \quad (4.40)$$

Die Unterschiede zum anderen 'continuous-growth'-Grenzfall, d.h. den Gleichungen (4.28)-(4.30), sind deutlich: Alle Wachstumsraten sind in diesem Fall proportional zu N_g , jedoch unterscheiden sich die Raten für Anzahl- und Massendichte in den Beiträgen der Verteilungsfunktion der Regentropfen, die die Vorfaktoren bestimmen.

Eine allgemeine Formulierung der integralen Wachstumsraten muss sowohl in der Lage sein, die beiden erläuterten 'continuous-growth'-Grenzfälle zu beschreiben als auch den Übergangsbereich.

4.2.3 Die Wisner-Approximation

Die Kollisionswechselwirkung von Partikeln ähnlicher Größe und Fallgeschwindigkeit wird gängigerweise durch die so genannte Wisner-Approximation beschrieben (Wisner et al., 1972). Das Problem der Behandlung der Betragsbildung in den integralen Wachstumsgleichungen wird dadurch umgangen, dass für die Fallgeschwindigkeiten charakteristische Mittelwerte an-

gesetzt werden. Verwendet man außerdem auch für die Kollisionseffizienz einen Mittelwert \bar{E} , so ergibt sich nach Wisner et al. (1972) aus den integralen Wachstumsgleichungen (hier am Beispiel der Graupel-Regen-Wechselwirkung)

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} |\bar{v}_g - \bar{v}_r| \bar{E}_{gr} \int_0^\infty \int_0^\infty [D_g(x_g) + D_r(x_r)]^2 f_g(x_g) f_r(x_r) dx_r dx_g \quad (4.41)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = -\frac{\pi}{4} |\bar{v}_g - \bar{v}_r| \bar{E}_{gr} \int_0^\infty \int_0^\infty [D_g(x_g) + D_r(x_r)]^2 f_g(x_g) f_r(x_r) x_r dx_r dx_g \quad (4.42)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = +\frac{\pi}{4} |\bar{v}_g - \bar{v}_r| \bar{E}_{gr} \int_0^\infty \int_0^\infty [D_g(x_g) + D_r(x_r)]^2 f_g(x_g) f_r(x_r) x_r dx_r dx_g. \quad (4.43)$$

Mit Annahmen für die Verteilungsfunktionen $f_g(x_g)$ und $f_r(x_r)$ kann die Integration nun ausgeführt werden. Setzt man für beide Partikelarten Gamma-Verteilungen in x an, so erhält man z.B.:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = & \frac{\pi}{4} |\bar{v}_g - \bar{v}_r| L_r N_g \bar{E}_{gr} \left[\frac{\Gamma(\nu_g + 2b_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2b_g} \Gamma(\nu_g + 1)} D_g^2(\bar{x}_g) \right. \\ & + 2 \frac{\Gamma(\nu_g + b_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{b_g} \Gamma(\nu_g + 1)} \frac{\Gamma(\nu_r + b_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{b_r + 1} \Gamma(\nu_r + 1)} D_g(\bar{x}_g) D_g(\bar{x}_r) \\ & \left. + \frac{\Gamma(\nu_r + 2b_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{2b_r + 1} \Gamma(\nu_r + 1)} D_r^2(\bar{x}_r) \right]. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Meist wird für die mittleren Fallgeschwindigkeiten \bar{v}_g und \bar{v}_r ein anzahl- oder massengewichtetes Mittel angesetzt (siehe z.B. Lin et al., 1983; Reisner et al., 1998). Wählt man jedoch für \bar{v}_g mit

$$\bar{v}_g = \frac{\int_0^\infty v_g(x_g) D_g^2(x_g) f_g(x_g) dx_g}{\int_0^\infty D_g^2(x_g) f_g(x_g) dx_g} = \frac{\Gamma(\nu + 2b_g + \beta_g + 1)}{(\nu + 1)^{\beta_g} \Gamma(2b_g + \nu_g + 1)} v_g(\bar{x}_g) \quad (4.45)$$

ein mit der Querschnittsfläche gewichtetes Mittel, so erhält man im 'continuous-growth'-Grenzfall $\bar{D}_g \gg \bar{D}_r$ und $\bar{v}_g \gg \bar{v}_r$:

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\nu_g + 2b_g + \beta_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2b_g + \beta_g} \Gamma(\nu_g + 1)} L_r N_g \bar{E}_{gr} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g), \quad (4.46)$$

was mit Gl. (4.27) identisch ist. Analog muss für die Teilchenklasse, die eingesammelt wird, die mittlere Fallgeschwindigkeit mit der Querschnittsfläche und der Partikelmasse gewichtet

werden (flächen-massen-gewichtetes Mittel)

$$\bar{v}_r = \frac{\int_0^\infty v_r(x_r) D_r^2(x_r) f_r(x_r) x_r dx_r}{\int_0^\infty D_r^2(x_r) f_r(x_r) x_r dx_r} = \frac{\Gamma(\nu + 2b_r + \beta_r + 2)}{(\nu + 1)^{\beta_r} \Gamma(2b + \nu + 2)} v_r(\bar{x}_r). \quad (4.47)$$

Mit dieser Definition erreicht man, dass die Wisner-Approximation auch für $\bar{v}_r \gg \bar{v}_g$ mit der entsprechenden 'continuous-growth'-Formulierung konsistent ist, da sich aus Gl. (4.44) mit Gl. (4.47)

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\nu_r + 2b_r + \beta_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{2b_r + \beta_r + 1} \Gamma(\nu_r + 1)} N_g L_r \bar{E}_{gr} D_r^2(\bar{x}_r) v_r(\bar{x}_r) \quad (4.48)$$

ergibt, was mit Gl. (4.37) übereinstimmt.

Bei der Wisner-Approximation tritt allerdings grundsätzlich das Problem auf, dass dann, wenn die charakteristischen Fallgeschwindigkeiten beider Partikelverteilungen gleich sind, die durch Gl. (4.44) gegebene Wachstumsrate Null wird. Dies ist jedoch nur im monodispersen Fall physikalisch korrekt und führt dazu, dass die Wachstumsrate gemäß Gl. (4.44) unter polydispersen Bedingungen mit geringen Fallgeschwindigkeitsdifferenzen um mehrere Größenordnungen zu klein sein kann. Trotz dieser Schwierigkeiten wird die Wisner-Approximation in fast allen Atmosphärenmodellen verwendet, die die Eisphase in parametrisierter Form beschreiben (Wisner et al., 1972; Cotton et al., 1982; Lin et al., 1983; Rutledge und Hobbs, 1984; Cotton et al., 1986; Straka, 1989; Reisner et al., 1998). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine Approximation verwendet, die dieses Problem vermeidet. Dieser neue Ansatz wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

4.2.4 Eine verbesserte Wisner-Approximation

Um das oben beschriebene Problem der Wisner-Approximation zu lösen, ist es notwendig, eine charakteristische Fallgeschwindigkeitsdifferenz zu definieren, die auch den Einfluss der Verteilungsfunktionen besser berücksichtigt. Nur dann kann eventuell die Kollisionswechselwirkung zweier Teilchenpopulationen mit gleicher mittlerer Fallgeschwindigkeit, die dann insbesondere von der Form und Breite der Verteilungsfunktionen abhängt, beschrieben werden. Ausgangspunkt ist ähnlich der Wisner-Approximation der Ansatz

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = \frac{\pi}{4} \overline{\Delta v_{gr}} \bar{E}_{gr} \int_0^\infty \int_0^\infty [D_g(x_g) + D_r(x_r)]^2 f_g(x_g) f_r(x_r) x_r dx_r dx_g. \quad (4.49)$$

Nimmt man für $f_g(x_g)$ und $f_r(x_r)$ Gamma-Verteilungen an, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = & \frac{\pi}{4} \overline{\Delta v_{gr}} L_r N_g \bar{E}_{gr} \left[\frac{\Gamma(\nu_g + 2b_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2b_g} \Gamma(\nu_g + 1)} \bar{D}_g^2 \right. \\ & + 2 \frac{\Gamma(\nu_g + b_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{b_g} \Gamma(\nu_g + 1)} \frac{\Gamma(\nu_r + b_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{b_r+1} \Gamma(\nu_r + 1)} \bar{D}_g \bar{D}_r \\ & \left. + \frac{\Gamma(\nu_r + 2b_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{2b_r+1} \Gamma(\nu_r + 1)} \bar{D}_r^2 \right]. \quad (4.50) \end{aligned}$$

Dabei ist $\overline{\Delta v_{gr}}$ die charakteristische Fallgeschwindigkeitsdifferenz beider Teilchenensembles. Ein physikalisch naheliegender Näherungsansatz für diese Fallgeschwindigkeitsdifferenz ist das integrale flächen-massen-gewichtete Varianzmaß

$$\overline{\Delta v_{gr}} = \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^\infty \int_0^\infty [v_g(x_g) - v_r(x_r)]^2 D_g^2 D_r^2 f_g(x_g) f_r(x_r) x_r dx_g dx_r \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.51)$$

Der Normierungsfaktor \mathcal{N} ist durch

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty \int_0^\infty D_g^2 D_r^2 f_g(x_g) f_r(x_r) x_r dx_g dx_r = C_{\mathcal{N}} N_r N_g D_r^2(\bar{x}_r) D_g^2(\bar{x}_g) \bar{x}_r \quad (4.52)$$

zu definieren, und unter der Annahme verallgemeinerter Gamma-Verteilungen für $f_g(x_g)$ und $f_r(x_r)$ ergibt sich außerdem

$$C_{\mathcal{N}} = \frac{\Gamma\left(\frac{2b_r + \nu_r + 2}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 1}{\mu_r}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 2}{\mu_r}\right)} \right]^{2b_r + 1} \frac{\Gamma\left(\frac{2b_g + \nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 2}{\mu_g}\right)} \right]^{2b_g}. \quad (4.53)$$

Auf Grund der allgemeingültigen Beziehung

$$\int |g(y)| dy \leq \sqrt{\int g^2(y) dy}$$

überschätzt der Varianzansatz die mittlere Geschwindigkeitsdifferenz systematisch. Die Näherung ist jedoch für hinreichend glatte Integranden gut. Durch die Gewichtung der integralen Geschwindigkeitsdifferenz mit D_g^2 (proportional zur Querschnittsfläche der einsammelnden Partikel) bzw. mit $x_r D_r^2$ (proportional zu Masse und Querschnittsfläche der eingesammelten Partikel) ist gewährleistet, dass auch dieser Ansatz in beiden 'continuous-growth'-Grenzfällen konsistent ist. Im Gegensatz zu der im vorangehenden Abschnitt dargestellten Variante der Wisner-Approximation konvergiert der Varianzansatz allerdings nur näherungsweise gegen die 'continuous-growth'-Grenzfälle. Setzt man Gamma-Verteilungen an, findet man analog zum

Flächenintegral der Wisner-Approximation

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v_{gr}} = & \left[\frac{\Gamma(\nu_g + 2\beta_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2\beta_g} \Gamma(\nu_g + 1)} v_g^2(\bar{x}_g) \right. \\ & - 2 \frac{\Gamma(\nu_g + \beta_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{\beta_g} \Gamma(\nu_g + 1)} \frac{\Gamma(\nu_r + \beta_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{\beta_r} \Gamma(\nu_r + 1 + k)} v_g(\bar{x}_g) v_r(\bar{x}_r) \\ & \left. + \frac{\Gamma(\nu_r + 2\beta_r + 2)}{(\nu_r + 1)^{2\beta_r} \Gamma(\nu_r + 1 + k)} v_r^2(\bar{x}_r) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

womit sich für $\bar{D}_g \gg \bar{D}_r$ und $\bar{v}_g \gg \bar{v}_r$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\nu_g + 2b_g + 1) \Gamma^{\frac{1}{2}}(\nu_g + 2\beta_g + 1)}{(\nu_g + 1)^{2b_g + \beta_g} \Gamma^{\frac{3}{2}}(\nu_g + 1)} L_r N_g \bar{E}_{gr} D_g^2(\bar{x}_g) v_g(\bar{x}_g) \quad (4.55)$$

ergibt. Einen Vergleich dieser Näherung mit dem 'continuous-growth'-Grenzfall Gl. (4.27) zeigt, dass der Fehler durch

$$W(\nu, b, \beta) = \frac{\Gamma(\nu + 2b + 1) \Gamma^{\frac{1}{2}}(\nu + 2\beta + 1)}{\Gamma(\nu + 2b + \beta + 1) \Gamma^{\frac{3}{2}}(\nu + 1)} \quad (4.56)$$

gegeben ist und von den Parametern ν , b und β abhängt. Für sphärische Partikel ($b = 1/3$) mit $\beta \leq 1/3$ ist diese Näherung gut. Die größten Fehler treten im Fall von Schnee in Form von 'mixed aggregates' nach Locatelli und Hobbs (1974) auf, da für diese Partikel der Geometrieexponent b den größten Wert annimmt ($b_s = 1/1.9$).

Setzt man die charakteristische Geschwindigkeitsdifferenz Gl. (4.54) in Gl. (4.50) ein, so ergibt sich ein auf den ersten Blick sehr umfangreicher Ausdruck. Für fest gewählte Parameter lassen sich die Konstanten, die sich aus den einzelnen Termen ergeben, jedoch explizit berechnen und man erhält recht einfache Parametrisierungsgleichungen. Setzt man für die Verteilungsfunktionen beider Partikelensembles verallgemeinerte Gamma-Verteilungen gemäß

$$f(x) = A x^\nu e^{-\lambda x^\mu} \quad (4.57)$$

an, so ergibt sich aus den integralen Wachstumsgleichungen (4.6)-(4.9)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gr}} = & \frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g L_r [\delta_g^0 D_g^2(\bar{x}_g) + \delta_{gr}^1 D_r(\bar{x}_r) D_g(\bar{x}_g) + \delta_r^1 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ & [\vartheta_g^0 v_g^2(\bar{x}_g) - \vartheta_{gr}^1 v_r(\bar{x}_r) v_g(\bar{x}_g) + \vartheta_r^1 v_r^2(\bar{x}_r)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

und

$$\left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll.gr}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g N_r [\delta_g^0 D_g^2(\bar{x}_g) + \delta_{gr}^0 D_r(\bar{x}_r) D_g(\bar{x}_g) + \delta_r^0 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ [\vartheta_g^0 v_g^2(\bar{x}_g) - \vartheta_{gr}^0 v_r(\bar{x}_r) v_g(\bar{x}_g) + \vartheta_r^0 v_r^2(\bar{x}_r)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.59)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll.gr}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{gr} N_g L_r [\delta_g^1 D_g^2(\bar{x}_g) + \delta_{gr}^1 D_r(\bar{x}_r) D_g(\bar{x}_g) + \delta_r^1 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ [\vartheta_g^1 v_g^2(\bar{x}_g) - \vartheta_{gr}^1 v_r(\bar{x}_r) v_g(\bar{x}_g) + \vartheta_r^1 v_r^2(\bar{x}_r)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.60)$$

mit (dimensionslosen) Koeffizienten δ^k und ϑ^k , die nur von der gewählten Verteilungsfunktion, d.h. den Konstanten μ und ν und den Partikeleigenschaften, d.h. den Konstanten b und β , abhängen:

$$\delta_g^k = \frac{\Gamma\left(\frac{2b_g + \nu_g + 1 + k}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 2}{\mu_g}\right)} \right]^{2b_g + k} \quad (4.61)$$

$$\delta_{gr}^k = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{b_r + \nu_r + 1 + k}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 1}{\mu_r}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{b_g + \nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 2}{\mu_r}\right)} \right]^{b_r + k} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 2}{\mu_g}\right)} \right]^{b_g} \quad (4.62)$$

$$\vartheta_g^k = \frac{\Gamma\left(\frac{2\beta_g + 2b_g + \nu_g + 1 + k}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{2b_g + \nu_g + 1 + k}{\mu_g}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 2}{\mu_g}\right)} \right]^{2\beta_g} \quad (4.63)$$

$$\vartheta_{gr}^k = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_r + b_r + \nu_r + 1 + k}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{b_r + \nu_r + 1 + k}{\mu_r}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_g + b_g + \nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{b_g + \nu_g + 1}{\mu_g}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 1}{\mu_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_r + 2}{\mu_r}\right)} \right]^{\beta_r} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 1}{\mu_g}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_g + 2}{\mu_g}\right)} \right]^{\beta_g} \quad (4.64)$$

Man beachte $\delta_{gr}^1 \neq \delta_{rg}^1$ und $\vartheta_{gr}^1 \neq \vartheta_{rg}^1$.

4.2.5 Ansatz von Murakami und Mizuno

Murakami (1990) und Mizuno (1990) verwenden einen ähnlichen Ansatz für die Geschwindigkeitsdifferenz gemäß

$$\overline{\Delta v_{sr}} = \sqrt{\vartheta_r \bar{v}_r^2 + \vartheta_{rs} \bar{v}_r \bar{v}_s + \vartheta_s \bar{v}_s^2}. \quad (4.65)$$

Dabei sind \bar{v}_r und \bar{v}_s mittlere massengewichtete Fallgeschwindigkeiten. Beide bestimmen die Koeffizienten empirisch, d.h. durch einen Fit an die analytische Lösung der Koagulationsgleichung. Mizuno (1990) verwendet für die Wechselwirkung Regen-Schnee unter der Annahme von Exponential-Verteilungen in D z.B. die Werte:

$$\vartheta_r = 1.2, \quad \vartheta_{rs} = 0.08, \quad \vartheta_s = -0.95.$$

Die Parametrisierungsgleichung nach Murakami (1990) und Mizuno (1990) ist damit formal identisch mit Gleichung (4.58), die Koeffizienten sind jedoch deutlich verschieden.

4.2.6 Vergleich der Näherungen mit numerischer Integration

Um die Anwendbarkeit und die Probleme der verschiedenen Näherungen zu untersuchen, wird im folgenden ein Vergleich mit einer numerischen Integration der Koagulationsgleichung (4.9) durchgeführt. Zur Approximation der Wachstumsrate Graupel-Regentropfen werden die analytischen Näherungen (4.44) sowie (4.49) verwendet. Ähnlich wie bei Verlinde et al. (1990) sind in den Abbildungen 4.2 und 4.3 die Quotienten

$$\frac{\text{numerische Integration}}{\text{analytische Näherung}} \quad (4.66)$$

als Funktion der mittleren Durchmesser angegeben. Dabei wurden für beide Partikel Exponential-Verteilungen in D mit $L = 0.5 \text{ g m}^{-3}$ angesetzt. Die Graupel-Partikel sind 'cold lump graupel' nach Heymsfield und Kajikawa (1987), die Fallgeschwindigkeit und der Durchmesser wurden wie in Tabelle 2.2 angegeben berechnet. Für die Regentropfen wurde das Fallgesetz nach Liu und Orville (1969) verwendet; dieses ist für kleine Regentropfen eine bessere Approximation als der Ansatz von Kessler (1969) und wird deshalb z.B. auch von Reisner et al. (1998) verwendet. Die Wisner-Approximation gibt in beiden 'continuous-growth'-Grenzfällen die korrekte Beschreibung. Sind die mittleren Fallgeschwindigkeiten hingegen von der gleichen Größenordnung, so wird die Umwandlungsrate deutlich unterschätzt. Der vorgeschlagene Varianzansatz für die charakteristische Fallgeschwindigkeitsdifferenz stellt eine Verbesserung gegenüber der klassischen Wisner-Approximation dar. Wie erwartet, wird die Umwandlungsrate dabei eher über- als unterschätzt. Diese verbesserte Wisner-Approximation ist im gesamten relevanten Größenbereich auf 30 % genau. In Anbetracht der Näherungen, die z.B. den Fallgesetzen der Partikel zu Grunde liegen, dürfte diese Näherung hier ausreichend sein.

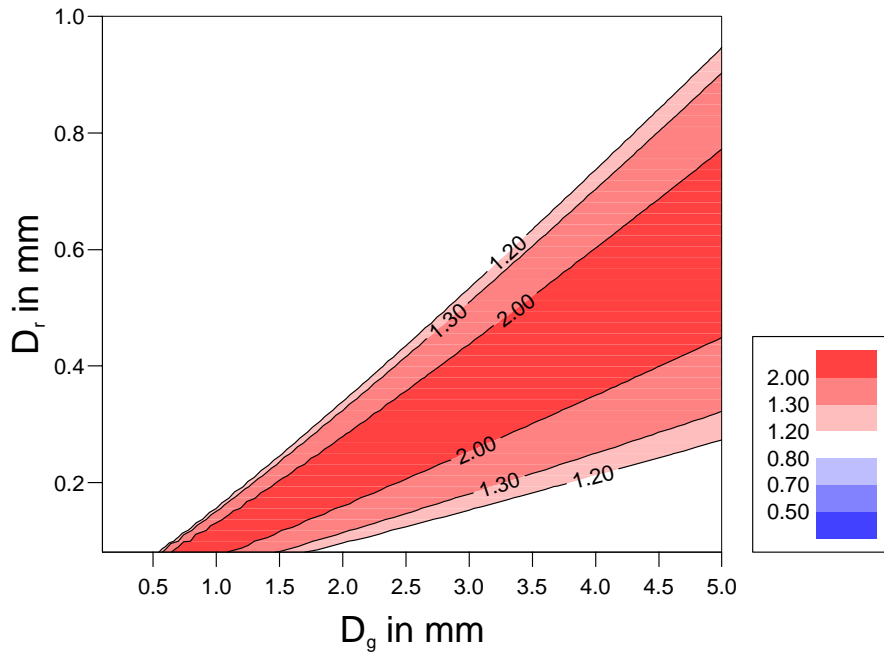


Abbildung 4.2: Umwandlungsrate Regentropfen-'cold graupel': Vergleich der Wisner-Approximation nach Gleichung (4.44) mit der numerischen Integration.

4.2.7 Die Varianz der Geschwindigkeitsverteilung

Bislang wurde angenommen, dass eine eindeutige Zuordnung zwischen der Masse bzw. dem Durchmesser der Partikel und der Fallgeschwindigkeit existiert. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, da zum einen bei komplexeren Formen, wie z.B. Schneepartikeln die Masse oder ein skalares Längenmaß nicht ausreicht, um das lokale Strömungsfeld um die Partikel zu charakterisieren. Zum anderen führt die atmosphärische Turbulenz dazu, dass die Fallgeschwindigkeit der Partikel von der Sedimentationsgeschwindigkeit, wie sie in Abschnitt 2.2 eingeführt wurde, abweicht. Um dies zu berücksichtigen, kann eine zusätzliche Geschwindigkeitsverteilungsfunktion eingeführt werden (siehe z.B. Böhm, 1990). Die Kollisionsfunktion ist dann z.B. für die Wechselwirkung Schnee-Wolkentropfen durch

$$K_{sc}(x_s, x_c) = \int_{v'_c=-\infty}^{+\infty} \int_{v'_s=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{4} [D_s + D_c]^2 E_{sc}(x_c, x_s) P_c(v'_c|x_c) P_s(v'_s|x_s) |v'_c - v'_s| dv'_c dv'_s \quad (4.67)$$

zu definieren. Dabei gibt die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion $P(v'|x)$ die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Partikel der Masse x mit der Geschwindigkeit v' fällt. Ist diese Ver-

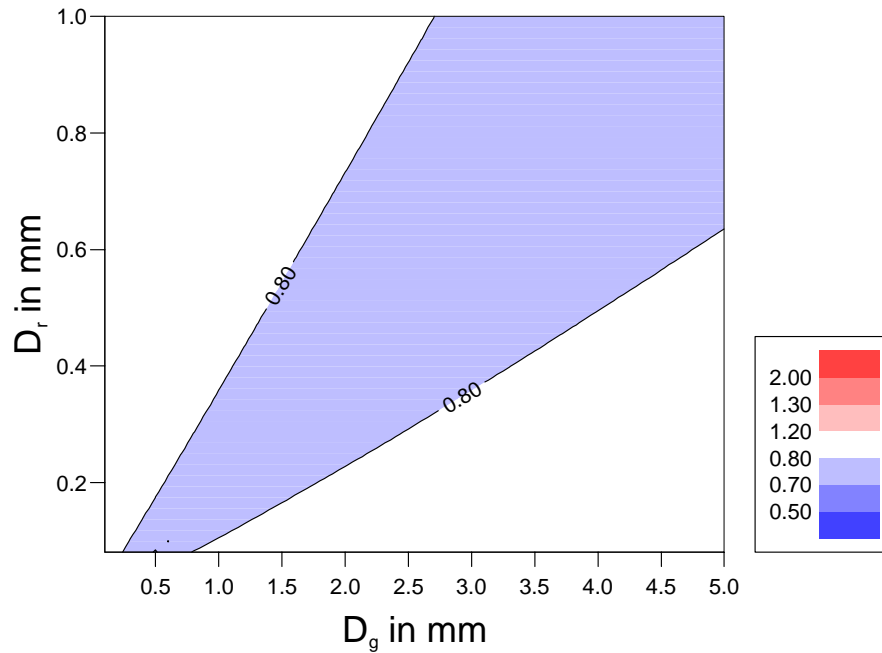


Abbildung 4.3: Umwandlungsrate Regentropfen–'cold graupel': Vergleich der verbesserten Wisner-Approximation nach Gleichung (4.49) und der numerischen Integration.

teilungsfunktion eine Diracsche Deltafunktion, d.h. gilt $P(v'|x) = \delta[v' - v(x)]$, wobei $v(x)$ die Sedimentationsgeschwindigkeit ist, ergibt sich mit Gleichung (4.12) der klassische Fall. Für die Varianznäherung der mittleren Fallgeschwindigkeitsdifferenz Gl. (4.51) erhält man bei Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion

$$\overline{\Delta v_{sc}}^2 = \frac{1}{N} \int_{x_c=0}^{+\infty} \int_{x_s=0}^{+\infty} \int_{v'_c=-\infty}^{+\infty} \int_{v'_s=-\infty}^{+\infty} (v'_s - v'_c)^2 D_s^2(x_s) D_c^2(x_c) f_s(x_s) f_c(x_c) P_c(v'_c|x_c) P_s(v'_s|x_s) x_c dv'_c dv'_s dx_s dx_c. \quad (4.68)$$

Leider liegen nur wenige Messungen vor, aus denen man auf die Form von $P(v'|x)$ schließen könnte. Böhm (1990) verwendet auf Grund theoretischer Betrachtungen eine Log-Normal-Verteilung, für die zudem Gleichung (4.67) analytisch integriert werden kann. Leider trifft Letzteres auf Gleichung (4.68) nicht zu, wenn man zusätzlich für $f_c(x)$ und $f_s(x)$ (verallgemeinerte) Gamma-Verteilungen postuliert. Für den einfacheren Fall einer Normal-Verteilung für $P(v'|x)$, d.h.

$$P(v'|x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v' - v(x)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (4.69)$$

erhält man jedoch

$$\overline{\Delta v_{sc}^2} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{x_c=0}^{+\infty} \int_{x_s=0}^{+\infty} D_s^2(x_s) D_c^2(x_c) f_s(x_s) f_c(x_c) x_c \int_{v'_c=-\infty}^{+\infty} \int_{v'_s=-\infty}^{+\infty} (v'_s - v'_c)^2 P_c(v'_c|x_c) P_s(v'_s|x_s) dv'_c dv'_s dx_s dx_c \quad (4.70)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{x_c=0}^{+\infty} \int_{x_s=0}^{+\infty} D_s^2(x_s) D_c^2(x_c) f_s(x_s) f_c(x_c) x_c \left[[v_s(x_s) - v_c(x_c)]^2 + \sigma_c^2 + \sigma_s^2 \right] dx_s dx_c$$

$$= \vartheta_s^0 v_s^2(\bar{x}_s) - \vartheta_{sc}^1 v_c(\bar{x}_c) v_s(\bar{x}_s) + \vartheta_c^1 v_c^2(\bar{x}_c) + \sigma_c^2 + \sigma_s^2, \quad (4.71)$$

wobei die ϑ -Koeffizienten durch die Gleichungen (4.63) und (4.64) gegeben sind. Hier könnte auch noch eine Größen- oder Massenabhängigkeit der Geschwindigkeitsvarianz σ berücksichtigt werden, ohne die Rechnung wesentlich aufwendiger zu machen. Leider lässt sich hierüber aus Messungen keine gesicherte Aussage ableiten. Meist wird pragmatisch $\sigma = \text{konst.}$ angenommen; für Schnee- und Eispartikel wird meist $\sigma_s = \sigma_i = 0.1 - 0.25 \text{ m s}^{-1}$ gesetzt (z.B. Murakami, 1990; Reisner et al., 1998).

Aus den integralen Wachstumsgleichungen (4.6)-(4.9) ergibt sich damit:

$$\left. \frac{\partial L_s}{\partial t} \right|_{\text{coll,sc}} = \frac{\pi}{4} \bar{E}_{sc} N_s L_c \left[\delta_s^0 D_s^2(\bar{x}_s) + \delta_{sc}^1 D_c(\bar{x}_c) D_s(\bar{x}_s) + \delta_c^1 D_c^2(\bar{x}_c) \right] \left[\vartheta_s^0 v_s^2(\bar{x}_s) - \vartheta_{sc}^1 v_c(\bar{x}_c) v_s(\bar{x}_s) + \vartheta_c^1 v_c^2(\bar{x}_c) + \sigma_c^2 + \sigma_s^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.72)$$

und

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{coll,sc}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{sc} N_s N_c \left[\delta_s^0 D_s^2(\bar{x}_s) + \delta_{sc}^0 D_c(\bar{x}_c) D_s(\bar{x}_s) + \delta_c^0 D_c^2(\bar{x}_c) \right] \left[\vartheta_s^0 v_s^2(\bar{x}_s) - \vartheta_{sc}^0 v_c(\bar{x}_c) v_s(\bar{x}_s) + \vartheta_c^0 v_c^2(\bar{x}_c) + \sigma_c^2 + \sigma_s^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{coll,sc}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{sc} N_s L_c \left[\delta_s^0 D_s^2(\bar{x}_s) + \delta_{sc}^1 D_c(\bar{x}_c) D_s(\bar{x}_s) + \delta_c^1 D_c^2(\bar{x}_c) \right] \left[\vartheta_s^0 v_s^2(\bar{x}_s) - \vartheta_{sc}^1 v_c(\bar{x}_c) v_s(\bar{x}_s) + \vartheta_c^1 v_c^2(\bar{x}_c) + \sigma_c^2 + \sigma_s^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.74)$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich die meisten Kollisionswechselwirkungen in Mischwolken behandeln. Im hier betrachteten Wolkenchema sind dies insbesondere:

- Das Bereifen von Wolkeneis, Schnee und Graupel mit Wolkentropfen. Die Konversion von Wolkeneis bzw. Schnee zu Graupel durch diesen Prozess wird in Abschnitt 4.4.3 separat behandelt.
- Das Bereifen von Graupel durch Regentropfen.
- Die Aggregation von Wolkeneis durch Schnee.
- Die Aggregation von Wolkeneis oder Schnee durch Graupel.

Die hier nicht aufgeführten Wechselwirkungen stellen Spezial- und Sonderfälle dar und werden im folgenden betrachtet.

4.2.8 Der Selbsteinfang von Schnee

Aus den im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Wachstumsraten lässt sich als Spezialfall auch der Selbsteinfang von Eisparkeln angeben. Für den Selbsteinfang von Schnee ergibt sich nur eine Änderung der Anzahldichte:

$$\left. \frac{\partial N_s}{\partial t} \right|_{\text{coll,ss}} = -\frac{\pi}{4} \bar{E}_{ss} N_s^2 \tilde{\delta}_{ss}^0 D_s^2(\bar{x}_s) \left[\tilde{\vartheta}_{ss}^0 v_s^2(\bar{x}_s) + 2 \sigma_s^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

mit den Koeffizienten

$$\tilde{\delta}_{ss}^0 = 2\delta_s^0 + \delta_{ss}^0 \quad (4.76)$$

$$\tilde{\vartheta}_{ss}^0 = 2\vartheta_s^0 - \vartheta_{ss}^0. \quad (4.77)$$

4.2.9 Die Aggregation von Wolkeneis

Die Aggregation des Wolkeneises führt zur Bildung von Schneepartikeln und wird deshalb auch als Autokonversion von Wolkeneis bezeichnet. Für diesen Prozess erhält man

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ii} = -\frac{0.83\pi}{4} \bar{E}_{ii} N_i^2 \tilde{\delta}_{ii}^0 D_i(\bar{x}_i) [\tilde{\vartheta}_{ii}^0 v_i^2(\bar{x}_i) + 2\sigma_i^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ii} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{ii} \quad (4.79)$$

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ii} = -\frac{0.83\pi}{4} \bar{E}_{ii} N_i L_i \tilde{\delta}_{ii}^1 D_i(\bar{x}_i) [\tilde{\vartheta}_{ii}^1 v_i^2(\bar{x}_i) + 2\sigma_i^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

$$\left. \frac{\partial L_s}{\partial t} \right|_{\text{coll},ii} = -\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{ii} \quad (4.81)$$

mit den Koeffizienten

$$\tilde{\delta}_{ii}^0 = 2\delta_s^0 + \delta_{ss}^0 \quad (4.82)$$

$$\tilde{\delta}_{ii}^1 = \delta_s^0 + \delta_{ss}^1 + \delta_s^1 \quad (4.83)$$

$$\tilde{\vartheta}_{ii}^0 = 2\vartheta_s^0 - \vartheta_{ss}^0 \quad (4.84)$$

$$\tilde{\vartheta}_{ii}^1 = \vartheta_s^0 - \vartheta_{ss}^1 + \vartheta_s^1. \quad (4.85)$$

4.2.10 Wechselwirkung Eispartikel-Regentropfen: Gefrorene Tropfen

Ein weiterer Sonderfall ist die Wechselwirkung von Wolkeneis oder Schnee mit Regentropfen. Bei diesem Prozess entstehen große gefrorene Tropfen, die der Graupelklasse zugeordnet werden. Die integralen Gleichungen für diesen Prozess sind

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = \left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_i(x_i) f_r(x_r) K_{iw}(x_i, x_r) dx_i dx_r \quad (4.86)$$

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_i(x_i) f_r(x_r) K_{iw}(x_i, x_r) x_i dx_i dx_r \quad (4.87)$$

$$\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_i(x_i) f_r(x_r) K_{iw}(x_i, x_r) x_r dx_i dx_r \quad (4.88)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = -\left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} - \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} \quad (4.89)$$

Und aus der verbesserten Wisner-Approximation erhält man

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} &= \left. \frac{\partial N_r}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} = -\frac{\pi}{4} \bar{E} N_i N_r [\delta_i^0 D_i^2(\bar{x}_i) + \delta_{ir}^0 D_r(\bar{x}_r) D_i(\bar{x}_i) + \delta_r^0 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ &\quad [\vartheta_i^0 v_i^2(\bar{x}_i) - \vartheta_{ir}^0 v_r(\bar{x}_r) v_i(\bar{x}_i) + \vartheta_r^0 v_r^2(\bar{x}_r) + \sigma_r^2 + \sigma_i^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} &= -\frac{\pi}{4} \bar{E} L_i N_r [\delta_i^1 D_i^2(\bar{x}_i) + \delta_{ir}^1 D_r(\bar{x}_r) D_i(\bar{x}_i) + \delta_r^0 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ &\quad [\vartheta_i^1 v_i^2(\bar{x}_i) - \vartheta_{ir}^1 v_r(\bar{x}_r) v_i(\bar{x}_i) + \vartheta_r^0 v_r^2(\bar{x}_r) + \sigma_r^2 + \sigma_i^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{coll},ir} &= -\frac{\pi}{4} \bar{E} L_i N_r [\delta_i^0 D_i^2(\bar{x}_i) + \delta_{ri}^0 D_r(\bar{x}_r) D_i(\bar{x}_i) + \delta_r^1 D_r^2(\bar{x}_r)] \\ &\quad [\vartheta_i^0 v_i^2(\bar{x}_i) - \vartheta_{ri}^1 v_r(\bar{x}_r) v_i(\bar{x}_i) + \vartheta_r^1 v_r^2(\bar{x}_r) + \sigma_r^2 + \sigma_i^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.92) \end{aligned}$$

wobei $\vartheta_{ri}^1 \neq \vartheta_{ir}^1$ zu beachten ist.

4.2.11 Die mittlere Kollisionseffizienz

Gängige Parametrisierungen der Wolkenmikrophysik vernachlässigen oft die Größenabhängigkeit der Kollisionseffizienz der einzelnen Partikelwechselwirkungen. Insbesondere für Wolkeneis, z.B. in Form hexagonaler Plättchen, ist diese Annahme unrealistisch. Beobachtungen und theoretische Untersuchungen zeigen, dass Wolkeneispartikel erst ab einer bestimmten Größe in der Lage sind, Wassertropfen einzufangen (Wang und Ji, 2000). Die Kollisionseffizienz, wie sie von Wang und Ji (2000) unter der Annahme hexagonaler Plättchen durch numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung berechnet wurde (siehe Abschnitt 2.2.4), zeigt, dass sowohl sehr kleine als auch große Tropfen ($r > 100 \mu\text{m}$) von hexagonalen Plättchen nicht eingefangen werden können. Der Fall sehr großer und damit schnell fallender Regentropfen, die mit hexagonalen Plättchen kollidieren, wird von Lew et al. (1985) behandelt.

Die mittlere Kollisionseffizienz, wie sie z.B. in Gleichung (4.49) auftritt, kann analog zur mittleren Fallgeschwindigkeit durch den gewichteten Mittelwert

$$\bar{E}_{ci}^k(\bar{x}_i, \bar{x}_c) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^\infty \int_0^\infty E_{ci}(x_i, x_c) D_i^2 D_c^2 f_i(x_i) f_c(x_c) x_c^k dx_i dx_c \quad (4.93)$$

definiert werden. Dabei ist der Normierungsfaktor \mathcal{N} durch Gleichung (4.52) gegeben. Diese

Gleichung kann z.B. mit den tabellierten Werten für E_{ci} numerisch ausgewertet werden - die Ergebnisse wären dann für fest gewählte Verteilungen ebenfalls zu tabellieren.

Im folgenden wird stattdessen ein einfacherer Ansatz verwendet: Um eine effiziente Parametrisierung der mittleren Kollisionseffizienz zu erreichen, wird \bar{E}_{ec} durch einen stückweise linearen Ansatz approximiert ($e = i, s, g$). Dabei gilt

$$\bar{E}_{koll,ec}(\bar{D}_e, \bar{D}_c) = \bar{E}_c(\bar{D}_c) \bar{E}_e(\bar{D}_e) \quad (4.94)$$

mit

$$\bar{E}_c(\bar{D}_c) = \begin{cases} 0, & \text{für } \bar{D}_c < \bar{D}_{c,0} \\ \frac{\bar{D}_c - \bar{D}_{c,0}}{\bar{D}_{c,1} - \bar{D}_{c,0}} & \text{für } \bar{D}_{c,0} \leq \bar{D}_c \leq \bar{D}_{c,1} \\ 1, & \text{für } \bar{D}_c > \bar{D}_{c,1} \end{cases} \quad (4.95)$$

und $\bar{D}_{c,0} = 15 \mu\text{m}$, $\bar{D}_{c,1} = 30 \mu\text{m}$ sowie

$$\bar{E}_e(\bar{D}_e) = \begin{cases} 0, & \text{für } \bar{D}_c \leq \bar{D}_{e,0} \\ \bar{E}_{max,e} & \text{für } \bar{D}_c > \bar{D}_{e,0} \end{cases} \quad (4.96)$$

mit $\bar{D}_{i,0} = \bar{D}_{s,0} = \bar{D}_{g,0} = 150 \mu\text{m}$ sowie $\bar{E}_{i,max} = \bar{E}_{s,max} = 0.8$ und $\bar{E}_{g,max} = 1.0$. Mit diesem Ansatz können die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge erfasst werden. Nicht berücksichtigt ist jedoch, dass für die Anzahldichte und die Massendichte unterschiedliche mittlere Kollisionseffizienzen auftreten.

4.2.12 Aggregationseffizienz zwischen Eispartikeln

Wie bereits in Abschnitt 2.2.4 dargestellt, ist die Parametrisierung der Anhafteffizienz ('sticking efficiency') von Eispartikeln insofern ein Problem, als dass hierzu nur wenige bzw. keine verlässlichen Messungen vorliegen. In der vorliegenden Arbeit werden nach Lin et al. (1983), Cotton et al. (1986) bzw. Straka (1989) die folgenden Parametrisierungen verwendet:

$$\bar{E}_{stick,ii}(T) = \text{MIN} [10^{0.035(T-T_3)-0.7}, 0.2] \quad (4.97)$$

$$\bar{E}_{stick,ss}(T) = \bar{E}_{stick,si}(T) = \bar{E}_{stick,gs}(T) = \bar{E}_{stick,gi}(T) = \exp[0.09(T - T_3)]. \quad (4.98)$$

4.3 Die Sedimentation der Eispartikel

Die Parametrisierung der Sedimentation der Eispartikel kann völlig analog zur Behandlung der Sedimentation der Wolken- bzw. Regentropfen erfolgen. Da für die Fallgesetze der Eispartikel Potenzgesetze postuliert werden, ergibt sich formal die gleiche mittlere Sedimentationsgeschwindigkeit wie für die Sedimentation der Wolkentropfen:

$$\bar{v}_{e,k}(\bar{x}) = \alpha_e \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu_e+\beta_e+1}{\mu_e}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\nu_e+1}{\mu_e}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_e+1}{\mu_e}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_e+2}{\mu_e}\right)} \right]^{\beta_e} \bar{x}_e^{\beta_e} = \alpha_{e,k} \bar{x}_e^{\beta_e} \quad (4.99)$$

mit $e = i, s, g$ für Wolkeneis, Schnee und Graupel.

4.4 Weitere Prozesse in Mischwolken: Ein kurzer Überblick

4.4.1 Nukleation von Eispartikeln

Die heterogene Nukleation von Eis wird im Allgemeinen in vier verschiedene Prozesse unterteilt. Dabei kann ein Aerosolpartikel bei einer, mehreren oder auch allen Nukleationsarten als Eiskeim wirken.

Bei Temperaturen unter 0 °C und Eisübersättigung kann Wasserdampf direkt auf Aerosolpartikeln Eis bilden (Depositionsnukleation). Wird bei $T < 0$ °C auch bzgl. Flüssigwasser Übersättigung erreicht, so kann sich auch unterkühltes Wasser auf Aerosolpartikeln anlagern, welches dann gefriert (Kondensationsnukleation). Wird bei Temperaturen über 0 °C ein Eiskeim als Tropfen aktiviert und kommt es dann auf Grund einer weiteren Abkühlung unter 0 °C zum Gefrieren, so bezeichnet man dies als Immersionsnukleation oder als heterogenes Gefrieren. Zur Kontaktnukleation kommt es, wenn ein unterkühlter Tropfen durch den Kontakt/Stoß mit einem Eiskeim gefriert. Welcher dieser Mechanismen unter welchen Bedingungen dominant ist, ist ungeklärt.

Depositions- und Kondensationsnukleation

Eine direkte Messung der einzelnen Nukleationsvorgänge ist äußerst schwierig, insbesondere ist die Unterscheidung zwischen Depositions- und Kondensationsnukleation mit den verfügbaren Messgeräten nicht möglich. Bei Messungen in Wolken schwanken außerdem die gemessenen Anzahldichten der Eispartikel stark, sowohl zeitlich als auch räumlich (siehe

Field et al., 2001 und Pruppacher und Klett, 1997, S. 309–314). Im folgenden werden einige gebräuchliche Parametrisierungen vorgestellt.

- Bei Eisübersättigung kann die Anzahldichte der Eiskeime durch eine diagnostische, empirische Beziehung bestimmt werden. Klassisch ist hierbei die so genannte Fletcher-Formel (Fletcher, 1962), die die Anzahldichte der Eiskeime in Abhängigkeit von der Temperatur angibt:

$$N_{i,\text{diag}} = N_{i0,\text{F62}} \exp[-\beta_{\text{F62}}(T - T_3)]. \quad (4.100)$$

Dabei sind $N_{i0,\text{F62}} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^{-3}$ und $\beta_{\text{F62}} = 0.6 \text{ K}^{-1}$.

Die Fletcher-Formel kann direkt als diagnostische Beziehung für die Anzahldichte der Eispartikel verwendet werden (siehe z.B. Reisner et al., 1998). Für Temperaturen $T \leq 246 \text{ K}$ wird die Anzahldichte auf den Wert beschränkt, den man für $T = 246 \text{ K}$ erhält:

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} = \begin{cases} \frac{N_{i,\text{diag}} - N_i}{\Delta t}, & \text{falls } S_i \geq 0 \text{ und } N_i < N_{i,\text{diag}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.101)$$

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} = x_{i,\text{nuc}} \left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{nuc}}. \quad (4.102)$$

Dabei ist $x_{i,\text{nuc}} = 1 \times 10^{-12} \text{ kg}$ eine willkürlich postulierte Masse der Eispartikel bei Nukleation.

- Verschiedene Messungen (z.B. Stein und Georgii, 1982) legen nahe, dass die Anzahldichte der Eiskeime nur eine Funktion der Eisübersättigung ist. Meyers et al. (1992) haben auf Grund von Labormessungen von Rogers (1982) sowie Al-Naimi und Saunders (1985) eine Parametrisierung der Anzahldichte der Eispartikel als Funktion der Eisübersättigung angegeben:

$$N_{i,\text{diag}} = N_{i0,\text{M92}} \exp[a_{\text{M92}} + b_{\text{M92}} S_i]. \quad (4.103)$$

Dabei ist $N_{i0,\text{M92}} = 1 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$, $a_{\text{M92}} = -0.639$, $b_{\text{M92}} = 12.96$ und $S_i = p_d/p_{di}(T) - 1$ (nach Meyers et al. (1992) findet Eisnukleation nur bei $T < 5 \text{ °C}$ statt).

- Zum Teil wird die obige Fletcher-Formel nicht als diagnostische Beziehung für die Anzahldichte der Eispartikel verwendet, sondern durch zeitliche Differentiation in eine Gleichung für die Nukleationsrate umformuliert. Murakami (1990) erhält so eine

Beziehung zwischen der Nukleationsrate und der Vertikalgeschwindigkeit:

$$\left. \frac{\partial N_i}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} = \frac{\partial N_i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -N_{i0,F62} \beta_{F62} \exp[-\beta_{F62}(T - T_3)] \frac{\partial T}{\partial z} w. \quad (4.104)$$

Khain et al. (2000) kritisieren ebenfalls die Verwendung diagnostischer Gleichungen der Form (4.100) und empfehlen die Umformulierung derartiger Beziehungen in eine prognostische, Lagrangesche Betrachtung.

Die Anwendbarkeit eines Nukleationsschemas hängt insbesondere von der horizontalen und vertikalen Auflösung des numerischen Modells ab, in dem die Parametrisierung verwendet werden soll - ist also skalenabhängig. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen konvektiver Mischwolken, die in Kapitel 5 diskutiert werden, wird die diagnostische Formulierung der Fletcher-Formel verwendet, da dieses Verfahren vergleichsweise robust ist, d.h. es weist nur eine geringe Auflösungsabhängigkeit auf.

Kontaktgefrieren

Die Anzahldichte der Kontaktnukleationskeime kann nach Young (1974a, 1974b) durch

$$N_i = N_{i0,Y74} (T_{Y74} - T_c)^{1.3} \quad (4.105)$$

parametrisiert werden. Dabei ist $N_{i0,Y74} = 2 \times 10^{-3} \text{ l}^{-1}$, $T_{Y74} = 270.16 \text{ K}$ und T_c ist die Temperatur der Wolkentropfen. Young (1974a) nimmt außerdem an, dass $N_{i0,Y74}$ linear mit der Höhe abnimmt. Meyers et al. (1992) geben auf Grund der Messungen von Vali (1974, 1976), Cooper (1980) und Deshler (1982) die Beziehung

$$N_i = N_{k0,M92} \exp[\alpha_{M92} + \beta_{M92}(T_3 - T_c)] \quad (4.106)$$

mit $N_{k0,M92} = 1 \text{ l}^{-1}$, $a = -2.80$ und $b = 0.262 \text{ K}^{-1}$ an, die deutlich kleinere Anzahldichten liefert. Beide Beziehungen geben jedoch nur die Anzahldichte der Kontaktnukleationskeime an! Um das Gefrieren der Tropfen zu berechnen, muss noch der Scavenging-Prozess, d.h. die Kollision von Tropfen und Aerosolpartikeln, beachtet werden. Dies kann z.B. analog zu der von Cotton et al. (1986) vorgeschlagenen Parametrisierung erfolgen. Auf Grund der mit der Parametrisierung des Scavenging-Prozesses verbundenen Probleme und der Tatsache, dass nach Meyers et al. (1992) die Kontaktnukleation gegenüber den anderen Nukleationsprozessen vernachlässigbar ist, wird im folgenden auf die Berücksichtigung der Kontaktnukleation verzichtet.

Heterogenes Gefrieren von Wolkentropfen ('immersion freezing')

Nach Bigg (1953) kann das heterogene Gefrieren von Wolkentropfen durch ein stochastisches Modell beschrieben werden. Khain et al. (2000) gibt für diesen Prozess die folgende Formulierung an:

$$\frac{1}{f_w(x)} \frac{\partial f_w(x)}{\partial t} \Big|_{\text{het}} = -x A_{B53} \exp[B_{B53}(T_3 - T) - 1] = -x J_{\text{het}}(T) \quad (4.107)$$

mit $A_{B53} = 0.1 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ und $B_{B53} = 0.66 \text{ K}^{-1}$ für reines Wasser nach Bigg (1953) oder für Regenwasser nach Barklie und Gokhale (1959) $A_{BG} = 0.2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ und $B_{BG} = 0.65 \text{ K}^{-1}$ (siehe Pruppacher und Klett, 1997, S. 350).

Für die Änderungsraten der Momente von $f_w(x)$ durch heterogenes Gefrieren erhält man aus obiger Gleichung:

$$\frac{\partial M_w^k}{\partial t} \Big|_{\text{het}} = -M_w^{k+1} J_{\text{het}}(T). \quad (4.108)$$

Da hier das $(k + 1)$ -te Moment auftritt, muss diese Gleichung durch die Annahme einer bestimmten Verteilungsfunktion geschlossen werden. Setzt man für $f_r(D)$ eine Exponentialverteilung an, wie sie für Regentropfen typisch ist, erhält man (siehe Anhang A):

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{het}} = -L_r J_{\text{het}}(T) = -N_r \bar{x}_r J_{\text{het}}(T) \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{het}} = -Z_r J_{\text{het}}(T) = -20 L_r \bar{x}_r J_{\text{het}}(T). \quad (4.110)$$

Homogenes Gefrieren von Wolkentropfen

Nach Jeffrey und Austin (1997) kann das homogene Gefrieren von Tropfen ebenfalls durch ein stochastisches Modell beschrieben werden. Aufbauend darauf geben Cotton und Field (2001) die folgende Parametrisierung an:

$$\frac{1}{f_w(x)} \frac{\partial f_w(x)}{\partial t} \Big|_{\text{hom}} = -x J_{\text{hom}}(T) \quad (4.111)$$

mit $J_{\text{hom}}(T)$ gemäß

$$\ln[J_{\text{hom}}] = \begin{cases} 25.63, & -65 \text{ °C} > T_c \\ -243.4 - 14.75T_c - 0.307T_c^2 & \\ -0.00287T_c^3 - 0.0000102T_c^4 & -65 \text{ °C} \leq T_c \leq -30 \text{ °C} \\ -7.63 - 2.996(T_c + 30) & -30 \text{ °C} < T_c. \end{cases} \quad (4.112)$$

Dabei ist $J_{\text{hom}}(T)$ in $\text{g}^{-1} \text{s}^{-1}$ angeben und T_c ist die Temperatur der Wolkentropfen. Die Änderungsraten für die Anzahl- und Massendichte durch homogenes Gefrieren ergeben sich analog zum heterogenen Gefrieren z.B. unter der Annahme eine Gamma-Verteilung für $f_c(x)$ zu

$$\left. \frac{\partial N_c}{\partial t} \right|_{\text{hom}} = -L_c J_{\text{hom}}(T) = -N_c \bar{x}_c J_{\text{hom}}(T) \quad (4.113)$$

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{hom}} = -Z_c J_{\text{hom}}(T) = -\frac{\nu_c + 2}{\nu_c + 1} L_c \bar{x}_c J_{\text{hom}}(T). \quad (4.114)$$

4.4.2 Depositionswachstum von Eispartikeln

Zur Berechnung des Depositionswachstums eines einzelnen Eispartikels wird meist die folgende Approximation verwendet (siehe z.B. Cotton et al., 1986; Flatau et al., 1989; Harrington et al., 1995 oder Pruppacher und Klett, 1997, S. 547)

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\text{dep}} = \frac{4\pi C_i f_v S_i}{\frac{R_d T}{\rho_{\text{ed}}(T) D_v} + \frac{L_{\text{ed}}}{K_T T} \left(\frac{L_{\text{ed}}}{R_d T} - 1 \right)} = \frac{4\pi}{C_i} D_i G_{\text{ed}}(T, p) f_v S_i \quad (4.115)$$

mit der Kapazität $C_i = D_i/c_i = D_i/2$ für sphärische Partikel oder der Näherung $C_i \approx D_i/\pi$ für dünne Plättchen (siehe z.B. Wacker, 1993; Harrington et al., 1995; Pruppacher und Klett, 1997, S. 547-548). Ovtchinnikov und Kogan (2000) verwenden für dünne Plättchen die massenabhängige Kapazitätsparametrisierung $C_i = 0.27 x_i^{0.384}$ mit x_i in kg und C_i in m. Für die Massendichte eines Partikelensembles ergibt sich mit $C_i = D_i/c_i$

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{dep}} = \int_0^\infty \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\text{dep}} f_i(x) dx = \frac{4\pi}{C_i} G_{\text{ed}}(T, p) S_i \int_0^\infty D_i(x) f_v(x) f_i(x) dx. \quad (4.116)$$

Der Ventilationskoeffizient $f_v(x)$ wird für sphärische Partikel nach Beard und Pruppacher (1971) und Pruppacher und Rasmussen (1979) durch

$$f_v = a_{v,i} + b_{v,i} N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2} \quad (4.117)$$

mit der Schmidt-Zahl $N_{Sc} = \nu_a / D_v = 0.71$ und den Koeffizienten $a_v = 0.78$ und $b_v = 0.308$ parametrisiert (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 541). Für flache Eispartikel, wie z.B. hexagonale Plättchen, kann nach Hall und Pruppacher (1976) der gleiche Ansatz mit den Koeffizienten $a_v = 0.86$ und $b_v = 0.28$ verwendet werden (siehe auch Pruppacher und Klett, 1997, S. 552). Dabei ist

$$N_{Re}(x) = \frac{v_i(x) D_i(x)}{\nu_a} \quad (4.118)$$

die Reynolds-Zahl eines Eispartikels, die nur noch von der Partikelmasse abhängt. Integriert man nun über die verallgemeinerte Gamma-Verteilung (siehe Anhang A), ergibt sich:

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{dep}} = \frac{4\pi}{c_i} G_{ed}(T, p) D_i(\bar{x}) \bar{f}_{v,1} S_i \quad (4.119)$$

mit dem mittleren Ventilationskoeffizienten

$$\bar{f}_{v,1} = \bar{a}_{\text{vent},1} + \bar{b}_{\text{vent},1} N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2}(\bar{x}_i) \quad (4.120)$$

und

$$\bar{a}_{\text{vent},n} = a_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n+b}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \right]^{b+n-1} \quad (4.121)$$

$$\bar{b}_{\text{vent},n} = b_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n+\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\beta}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \right]^{\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\beta+n-1} \quad (4.122)$$

(siehe auch Abschnitt 4.4.4).

4.4.3 Bereifen der Eispartikel und Umwandlung in Graupel

Nach Beheng (1981) wird ein bereifter Eiskristall zu Graupel, wenn die eingesammelten Tropfen das Differenzvolumen zur Kugel auffüllen, wobei der Raumerfüllungskoeffizient $\alpha_o \approx 0.68$ zu berücksichtigen ist. Hieraus ergibt sich eine mittlere kritische Reifmasse für die Umwandlung eines bereiften Eiskristalls in Graupel von

$$x_{\text{krit,rime}} = \alpha_o \rho_w (V_{\text{Graupel}} - V_{\text{Eis}}) = \alpha_o \rho_w \left(\frac{\pi}{6} \bar{D}_i^3 - \frac{\bar{x}_i}{\rho_\varepsilon} \right). \quad (4.123)$$

Aus der Bereifungsrate $\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{rime}}$ erhält man damit als charakteristische Zeit für den Umwandlungsprozess:

$$\tau_{\text{conv}} = \frac{x_{\text{krit,rime}}}{\left. \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t} \right|_{\text{rime}}} = \frac{x_{\text{krit,rime}}}{\frac{1}{N_i} \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{rime}}} = \frac{\alpha_o \rho_w N_i \left(\frac{\pi}{6} \bar{D}_i^3 - \frac{\bar{x}_i}{\rho_\varepsilon} \right)}{\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{rime}}}. \quad (4.124)$$

Die Umwandlungsrate bzgl. der Massendichte ergibt sich damit aus dem Quotienten von Massendichte und charakteristischer Zeit zu

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{conv}} = \frac{L_i}{\tau_{\text{conv}}} = \frac{1}{\alpha_o \frac{\rho_w}{\rho_\varepsilon} \left(\frac{\pi}{6} \frac{\bar{D}_i^3}{\bar{x}_i} - 1 \right)} \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{rime}}. \quad (4.125)$$

Eismultiplikation nach Hallett und Mossop

Beim Bereifen von Eispartikeln werden in Abhängigkeit von der Temperatur kleinste Eissplinter erzeugt. Dieser Prozess, der oft für die schnelle Vereisung von Mischwolken verantwortlich gemacht wird, kann nach Laboruntersuchungen von Hallett und Mossop (1974) in Abhängigkeit von der Temperatur und der Bereifungsrate durch das folgende Schema parametrisiert werden:

$$\left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{splint}} = F_{\text{splint}}(T) \left. \frac{\partial L_e}{\partial t} \right|_{\text{rime}} \quad (4.126)$$

mit $L_e = L_i + L_s + L_g$ und

$$F_{\text{splint}}(T) = \begin{cases} 0, & \text{für } T \leq T_{\text{splint,min}} \\ C_{\text{splint}} \frac{T - T_{\text{splint,min}}}{T_{\text{splint,opt}} - T_{\text{splint,min}}}, & \text{für } T_{\text{splint,min}} < T \leq T_{\text{splint,opt}} \\ C_{\text{splint}} \frac{T_{\text{splint,opt}} - T}{T_{\text{splint,opt}} - T_{\text{splint,max}}}, & \text{für } T_{\text{splint,opt}} < T \leq T_{\text{splint,max}} \\ 0, & \text{für } T > T_{\text{splint,max}} \end{cases} \quad (4.127)$$

mit $C_{\text{splint}} = 3.5 \times 10^8$, $T_{\text{splint,min}} = 265$ K, $T_{\text{splint,opt}} = 268$ K und $T_{\text{splint,max}} = 270$ K.

4.4.4 Schmelzen von Eispartikeln

In vereinfachter Form kann das Schmelzen eines Eisteilchens (Graupel, Schnee, usw.) durch

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{2\pi}{L_{ew}} D_g \left[K_T (T - T_3) f_h + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) f_v \right] \quad (4.128)$$

mit $x_g = x_i + x_w = \text{const.}$ beschrieben werden (Pruppacher und Klett, 1997, S. 693). Dabei ist x_g die Gesamtmasse des Teilchens; x_i und x_w sind die Partialmassen des Eis- und

des Flüssiganteils. Die Ventilationskoeffizienten für Wärme f_h und Wasserdampf f_v können durch

$$f_v = a_{v,g} + b_{v,g} N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2}, \quad f_h = \frac{D_T}{D_v} f_v = \frac{K_T}{c_p \rho_0 D_v} f_v \quad (4.129)$$

parametrisiert werden. Als charakteristische Zeitskala für das Schmelzen eines einzelnen Teilchens ergibt sich damit

$$\tau_{\text{melt}} = \frac{x_g}{\frac{dx_i}{dt}} = \frac{L_{ew}}{2\pi} \frac{x_g}{D_g f_v} \left[\frac{K_T D_T}{D_v} (T - T_3) + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) \right]^{-1} \quad (4.130)$$

und unter Berücksichtigung der Größenverteilungsfunktion $f_g(x)$ erhält man hieraus eine Approximation für die Umwandlungsrate des n -ten Moments durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_g^n}{\partial t} \right|_{\text{melt}} &= - \int_0^{\infty} \frac{x^n f_g(x)}{\tau_{\text{melt}}} dx = - \frac{2\pi}{L_{ew}} \left[\frac{K_T D_T}{D_v} (T - T_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) \right] \int_0^{\infty} D_g(x) f_v(x) f_g(x) x^{n-1} dx, \quad (4.131) \end{aligned}$$

was sich unter der Annahme einer verallgemeinerten Gamma-Verteilung für $f_g(x)$ leicht auswerten lässt. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_g^n}{\partial t} \right|_{\text{melt}} &= - \frac{2\pi}{L_{ew}} \left[\frac{K_T D_T}{D_v} (T - T_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) \right] N_g D_g(\bar{x}_g) \bar{x}_g^{n-1} \bar{f}_{v,n}(\bar{x}_g) \quad (4.132) \end{aligned}$$

mit dem n -ten mittleren Ventilationskoeffizienten

$$\bar{f}_{v,n}(\bar{x}) = \bar{a}_{\text{vent},n} + \bar{b}_{\text{vent},n} N_{Sc}^{1/3} N_{Re}^{1/2}(\bar{x}), \quad (4.133)$$

der mittleren Reynolds-Zahl

$$N_{Re}(\bar{x}) = \frac{v(\bar{x}) D(\bar{x})}{\nu_a} \quad (4.134)$$

und den Koeffizienten

$$\bar{a}_{\text{vent},n} = a_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n+b}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \right]^{b+n-1} \quad (4.135)$$

$$\bar{b}_{\text{vent},n} = b_v \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n+\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\beta}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \right]^{\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\beta+n-1} \quad (4.136)$$

Dabei ist zu beachten, dass aus $f_v \equiv 1$ nicht $\bar{f}_v \equiv 1$ folgt. Die Bezeichnung 'mittlerer Ventilationskoeffizient' ist somit etwas irreführend, da $\bar{a}_{\text{vent},n}$ insbesondere aus der D -Abhängigkeit der Kapazität resultiert. Außerdem muss ν hinreichend groß gewählt werden. Mit $\bar{f}_{h,n} = \frac{D_T}{D_v} \bar{f}_{v,n}$ ergibt sich auch:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial N_g}{\partial t} \right|_{\text{melt}} &= -\frac{2\pi}{L_{ew}} \left[K_T (T - T_3) \bar{f}_{h,0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) \bar{f}_{v,0} \right] \frac{N_g D_g(\bar{x}_g)}{x_g} \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{melt}} &= -\frac{2\pi}{L_{ew}} \left[K_T (T - T_3) \bar{f}_{h,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_v L_{ed}}{R_d} \left(\frac{p_d}{T} - \frac{p_{wd}(T_3)}{T_3} \right) \bar{f}_{v,1} \right] N_g D_g(\bar{x}_g). \end{aligned} \quad (4.138)$$

Schmelzen von Eisparkeln durch Kollision mit Tropfen ('enhanced melting')

Nach Rutledge und Hobbs (1984) ist der zusätzliche Beitrag der Tropfenkollisionen zum Schmelzen von Eisparkeln durch

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{melt,gc}} = -\frac{c_w}{L_{ew}} (T - T_3) \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{coll,gc}} \quad (4.139)$$

zu berücksichtigen. Dabei wird die Annahme gemacht, dass die Energie, die den schmelzenden Partikeln auf Grund der Temperaturdifferenz zwischen den eingesammelten Wassertropfen und den schmelzenden Partikeln zugeführt wird, vollständig zum Schmelzen von Eis zur Verfügung steht.

Verdunstung von schmelzenden Eispartikeln

Die Verdunstung von schmelzenden Eispartikeln kann analog zur Verdunstung der Regentropfen in Abschnitt 3.7.3 berechnet werden. Analog zu Gl. (3.160) ergibt sich

$$\left. \frac{\partial N_g}{\partial t} \right|_{\text{eva}} = 2\pi G_{wd}(T_3, p) S D_g(\bar{x}_g) \bar{f}_{v,0}(\bar{x}_g) \bar{x}_g^{-1} \quad (4.140)$$

$$\left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{eva}} = 2\pi G_{wd}(T_3, p) S D_g(\bar{x}_g) \bar{f}_{v,1}(\bar{x}_g), \quad (4.141)$$

wobei als Oberflächentemperatur der schmelzenden Partikel T_3 angenommen wurde.

Kapitel 5

Simulation hochreichender Konvektion

5.1 Wolkenmikrophysik und Numerik

5.1.1 Das Gleichungssystem der Wolkenmikrophysik

Die in den vorangehenden Kapiteln beschriebenen wolkenmikrophysikalischen Prozesse bestimmen, zusammen mit der Advektion und der turbulenten Diffusion, die räumliche und zeitliche Entwicklung der Anzahl- und Massendichten der Hydrometeore. Die vollständigen Bilanzgleichungen unter der Berücksichtigung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse Nukleation (nuc), Kondensation/Verdunstung (cond), Deposition/Sublimation (dep), Verdunstung (eva), homogenes bzw. heterogenes Gefrieren (freeze), Autokonversion (au), Akkreszenz (ac), Selbsteinfang (sc), Schmelzen (melt) sowie der Kollisionen, an denen Eispartikel beteiligt sind (coll), der Konversion der Eis- bzw. Schneepartikel nach Graupel (conv) und der Eismultiplikation nach Hallett und Mossop (splint) lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho_d) - \nabla \cdot (K_h \nabla \rho_d) = \\ - \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} - \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{nuc}} - \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{cond}} - \left. \frac{\partial L_i}{\partial t} \right|_{\text{dep}} - \left. \frac{\partial L_s}{\partial t} \right|_{\text{dep}} \\ - \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{dep}} - \left. \frac{\partial L_r}{\partial t} \right|_{\text{eva}} - \left. \frac{\partial L_s}{\partial t} \right|_{\text{eva}} - \left. \frac{\partial L_g}{\partial t} \right|_{\text{eva}}, \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N_c) - \nabla \cdot (K_h \nabla N_c) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{c,0}N_c) = \\
+ \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{nuc}} + \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{sc}} - \frac{2}{x^*} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{au}} - \frac{1}{\bar{x}_c} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{ac}} + \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} \\
+ \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ic}} + \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sc}} + \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gc}} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{melt}}, \quad (5.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}L_c) - \nabla \cdot (K_h \nabla L_c) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{c,1}L_c) = \\
+ \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{nuc}} + \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{cond}} - \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{au}} - \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{ac}} + \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} \\
- \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ic}} - \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sc}} - \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gc}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{melt}}, \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N_r) - \nabla \cdot (K_h \nabla N_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{r,0}N_r) = \\
+ \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ir}} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sr}} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gr}} - \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} - \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gc}} \\
- \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gr}} - \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{sc}} + \frac{2}{x^*} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{au}} + \frac{1}{\bar{x}_r} \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{ac}} + \frac{\partial N_r}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}, \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}L_r) - \nabla \cdot (K_h \nabla L_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{r,1}L_r) = \\
+ \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ir}} - \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sr}} - \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gr}} - \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} \\
- \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gc}} - \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gr}} - \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{au}} + \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{ac}} + \frac{\partial L_r}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}, \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N_i) - \nabla \cdot (K_h \nabla N_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{i,0} N_i) &= \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{nuc}} - \frac{\partial N_c}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} \\
&+ \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ii}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,si}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gi}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,ic}} \\
&+ \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,ir}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sc}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sr}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gc}} \\
&+ \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gr}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,icg}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,irg}} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{melt}}, \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}L_i) - \nabla \cdot (K_h \nabla L_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{i,1} L_i) &= \\
&+ \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{nuc}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{dep}} - \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ii}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,si}} \\
&+ \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gi}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ic}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ir}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sc}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sr}} \\
&+ \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gc}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gr}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,icg}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,irg}} + \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{melt}}, \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N_s) - \nabla \cdot (K_h \nabla N_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{s,0} N_s) &= \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ii}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ss}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gs}} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sc}} \\
&- \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sr}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,scg}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,srg}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}L_s) - \nabla \cdot (K_h \nabla L_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{s,1} L_s) &= \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{dep}} \\
&- \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ii}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,ss}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,si}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gs}} \\
&+ \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sc}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{coll,sr}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sc}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,sr}} \\
&+ \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,scg}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,srg}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N_g) - \nabla \cdot (K_h \nabla N_g) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{g,0}N_g) = & - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gc}} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gr}} \\
& - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,icg}} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,irg}} - \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,scg}} - \frac{\partial N_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,srg}} \\
& + \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gc}} + \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gr}} + \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial N_g}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}L_g) - \nabla \cdot (K_h \nabla L_g) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_{g,1}L_g) = & \\
& + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{dep}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gc}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{splint,gr}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gi}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gs}} \\
& + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gc}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{coll,gr}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,icg}} - \frac{\partial L_i}{\partial t} \Big|_{\text{conv,irg}} - \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,scg}} \\
& - \frac{\partial L_s}{\partial t} \Big|_{\text{conv,srg}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gc}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt,gr}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{melt}} + \frac{\partial L_g}{\partial t} \Big|_{\text{eva}}. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Quellterme werden wie in den Kapiteln 3 und 4 beschrieben berechnet. Für die Sedimentationsgeschwindigkeiten der Hydrometeore wird, auch innerhalb der Kollisions-terme, eine höhenabhängige Korrektur als Funktion der Grundzustandsdichte proportional zu η^{-1} bzw. $\rho^{-1/2}$ angewandt (siehe Abschnitt 2.2.2).

In viele Quellterme der Wolkenmikrophysik gehen die mittleren Massen der Partikelensembles ein. Diese werden als Quotienten der Anzahl- und Massendichten gebildet:

$$\bar{x}_k = \frac{L_k}{N_k}, \quad k = c, r, i, s, g. \quad (5.12)$$

Für $L_k \rightarrow 0$ und $N_k \rightarrow 0$ ist \bar{x}_k nicht eindeutig bestimmt, d.h. es folgt für diesen Grenzfall nicht stets $\bar{x}_k \rightarrow 0$ und es können beliebig große und damit unphysikalische mittlere Massen auftreten. Es ist deshalb notwendig und üblich, die mittleren Massen der Hydrometeore nach unten und oben zu begrenzen. Im folgenden werden hierfür konstante minimale und maximale mittlere Massen verwendet.

In Tabelle 5.1 sind für die verwendeten Hydrometeorklassen die Geometrie- und Fallgesetze sowie die Parameter μ und ν der verallgemeinerten Gamma-Verteilung, die die Größenverteilungsfunktion festlegt, und die minimalen und maximalen Partikelmassen angegeben. Für die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen wird das Potenzgesetz nur in den Quell- bzw. Kollisions-terminen, jedoch nicht für die Sedimentation verwendet, da das Potenzgesetz eine schlechtere Approximation darstellt als das Fallgesetz nach Rogers et al. (1993).

Tabelle 5.1: Partikeldurchmesser und Fallgesetze sowie die konstanten Parameter ν und μ der Verteilungsfunktion $f(x) = Ax^\nu \exp(-\lambda x^\mu)$ und die minimalen und maximalen mittleren Massen für die fünf Hydrometeorklassen.

Partikelklasse	Durchmesser $D(x)$ (D in m, x in kg)	Fallgesetz $v(x)$ (v in ms^{-1} , x in kg)	ν	μ	\bar{x}_{min} (in kg)	\bar{x}_{max} (in kg)
Wolkentropfen	$D = 0.124 x^{1/3}$	$v = 3.75 \times 10^5 x^{2/3}$	0	1	4.2×10^{-15}	2.6×10^{-10}
Regentropfen	$D = 0.124 x^{1/3}$	$v = 159.0 x^{0.266}$	- 2/3	1/3	2.6×10^{-10}	5.0×10^{-06}
Wolkeneis	$D = 0.217 x^{1/3.31}$	$v = 317.0 x^{0.363}$	0	1	1.0×10^{-12}	1.0×10^{-04}
Schnee	$D = 8.156 x^{1/1.9}$	$v = 27.70 x^{0.22}$	1	1/3	1.7×10^{-09}	5.0×10^{-06}
Graupel	$D = 0.190 x^{1/3.21}$	$v = 46.40 x^{0.26}$	1	1/3	2.6×10^{-10}	5.0×10^{-04}

5.1.2 Zeitintegration und Operatorsplitting

Zur numerischen Approximation der partiellen Differentialgleichungen (5.1)-(5.11) wird als Zeitdiskretisierung das Eulersche Verfahren erster Ordnung verwendet. Um die numerische Stabilität zu garantieren, wird ein so genanntes Operatorsplitting angewandt, d.h. die einzelnen Terme jeder Differentialgleichung werden nacheinander berechnet und die Zeitintegration schrittweise durchgeführt. Für die Bilanzgleichung des Wolkenwassers wird dies im Zeitschritt t_i z.B. wie folgt durchgeführt:

$$L_c^I = L_c \Big|_{t=t_i} - \Delta t \nabla \cdot (\mathbf{v} L_c) \Big|_{t=t_i},$$

$$L_c^{II} = L_c^I + \Delta t \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{nuc}, t=t_i},$$

$$L_c^{III} = L_c^{II} + \Delta t \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{freeze}, t=t_{II}},$$

$$L_c^{IV} = L_c^{III} + \Delta t \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll, ic}, t=t_{III}},$$

$$L_c^V = L_c^{IV} + \Delta t \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll, sc}, t=t_{IV}},$$

$$L_c^{VI} = L_c^V + \Delta t \frac{\partial L_c}{\partial t} \Big|_{\text{coll, gc}, t=t_V},$$

$$\begin{aligned}
L_c^{VII} &= L_c^{VI} + \Delta t \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{melt}, t=t_{VI}}, \\
L_c^{VIII} &= L_c^{VII} + \Delta t \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{au}, t=t_{VII}}, \\
L_c^{IX} &= L_c^{VIII} + \Delta t \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{ac}, t=t_{VIII}}, \\
L_c^X &= L_c^{IX} + \Delta t \left. \frac{\partial L_c}{\partial t} \right|_{\text{cond}, t=t_{IX}}, \\
L_c^{XI} &= L_c^X - \Delta t \left. \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}_{c,1} L_c) \right|_{t=t_X}, \\
L_c^{t_i+\Delta t} &= L_c^{XI} + \Delta t \nabla \cdot (K_h \nabla L_c) \Big|_{t=t_{XI}}.
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren ermöglicht es außerdem auf einfache Weise zu gewährleisten, dass die Anzahl- und Massendichten positiv definit sind, da hierzu nur jeder Prozess für sich diese Bedingung erfüllen muss. Allerdings tritt bei diesem numerischen Verfahren das Problem auf, dass das Resultat von der Reihenfolge, in der die einzelnen Terme berechnet werden, abhängen kann. Für hinreichend kleine Zeitschritte sind derartige Effekte jedoch vernachlässigbar.

Die Diskretisierung der prognostischen Gleichungen der Dynamik und die notwendigen Randbedingungen werden ausführlich von Baldauf (2001) behandelt. Tabelle 5.2 fasst die wesentlichen Parameter der im folgenden verwendeten Modellversion zusammen.

5.1.3 Aktivierungsspektren und Nukleation

Die Wolkenmikrophysik wird in hohem Maße durch die Anzahl der unter den gegebenen atmosphärischen Bedingungen aktivierbaren Aerosolpartikel, d.h. der verfügbaren Kondensationskerne, beeinflusst (siehe Abschnitt 3.7.1). In Abbildung 5.1 sind zwei Aktivierungsspektren, d.h. die Funktion $N_{CCN}(S)$, die die Anzahldichte der bei einer bestimmten Übersättigung S aktivierten Aerosolpartikel angibt, dargestellt. Der maritime Fall entspricht dabei dem synthetischen $NaCl$ -Datensatz nach Cohard et al. (1998) (siehe Tabelle 3.4), der kontinentale Fall basiert auf Messungen in Texas / USA (Khain et al., 2001, siehe Tabelle 3.3). Beide Aktivierungsspektren können als Grenzfälle extremer maritimer bzw. kontinentaler Bedingungen angesehen werden.

Die Nukleation der Wolkentropfen wird wie in Abschnitt 3.7.1 beschrieben behandelt. Für

Tabelle 5.2: Modellparameter für KAMM2 in der Modellversion vom 20. März 2002.

Parameter	Einstellung / Wert
Advektion (Dynamik)	Flusslimiterverfahren 'superbee'
Advektion (Skalare)	Flusslimiterverfahren 'superbee'
Strang-Splitting (Dynamik)	Nein
Strang-Splitting (Skalare)	Nein
Coriolisterm	Nein
turbulente Diffusion	TKE-Modell mit Blackadar-Mischungsweg
Boden-Vegetationsmodell	Nein
Landnutzungsklasse	8 ('Wiesen und Weiden')
obere Randbedingung	Dämpfungsschicht (mit konstantem Koeffizienten)
Wert des Dämpfungskoeffizienten	0.05
seitliche Randbedingung	Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung
Verhältnis Schallzeitschritt / langsamer Zeitschritt	20
Zeitdiskretisierung der Schallprozesse	implizit
Koeffizient für Divergenzdämpfung	0.10
Glättungsfilter 4. Ordnung	Ja
Wert des Filterfaktors	2.5×10^{-3}
Diskretisierung der Auftriebsterme	innerhalb der Schallterme

die heterogene Depositions-Kondensations-Nukleation der Wolkeneispartikel wird die in Abschnitt 4.4.1 erläuterte diagnostische Parametrisierung auf Basis der Fletcher-Formel verwendet. Auf die Berücksichtigung des Hallett-Mossop-Prozesses wird im folgenden verzichtet.

5.2 Grundzustand und Anfangsbedingung

Für die folgenden Simulationen wird zur Initialisierung des Temperatur- und Feuchteprofils ein idealisierter Radiosondenaufstieg ähnlich dem von Weisman und Klemp (1982) verwendet. Dabei sind die potentielle Temperatur θ und die relative Feuchte r_d als Funktion der Höhe z durch

$$\theta(z) = \begin{cases} \theta_0 + (\theta_{tr} - \theta_0) \left(\frac{z}{z_{tr}}\right)^{5/4}, & z \leq z_{tr} \\ \theta_{tr} \exp\left[\frac{g}{c_p T_{tr}}(z - z_{tr})\right], & z > z_{tr}, \end{cases} \quad (5.13)$$

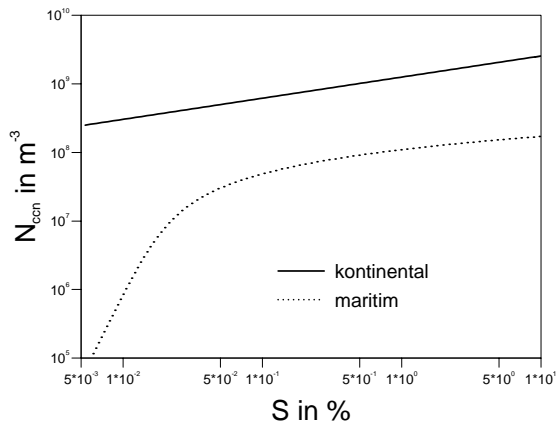


Abbildung 5.1: Aktivierungsspektren $N_{CCN}(S)$ unter kontinentalen und maritimen Bedingungen.

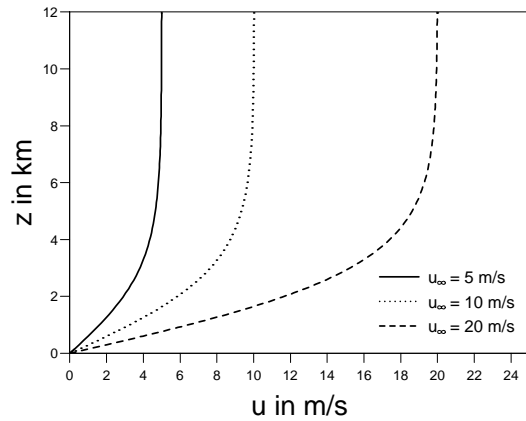


Abbildung 5.2: Vertikalprofil der Windgeschwindigkeit nach Gl. (5.18).

$$r_d(z) = \begin{cases} r_{max} - (r_{max} - r_{min}) \left(\frac{z}{z_{tr}}\right)^{5/4}, & z \leq z_{tr} \\ r_{min}, & z > z_{tr} \end{cases} \quad (5.14)$$

mit $z_{tr} = 12$ km, $\theta_0 = 300$ K, $\theta_{tr} = 338$ K, $r_{min} = 0.25$ und $r_{max} = 1.00$ gegeben. Außerdem wird in Bodennähe das Mischungsverhältnis nach oben begrenzt, z.B. durch $q_{max} = 12$ g kg⁻¹, um die gut durchmischte Grenzschicht zu beschreiben. Während das Profil der potentiellen Temperatur den Druck und die Temperatur des Grundzustandes bestimmt, stellt das Feuchteprofil eine reine Anfangsbedingung dar, da der Grundzustand als trocken definiert wurde. Diese Vertikalprofile sind in Abbildung 5.3 für $q_{max} = 12$ g kg⁻¹ dargestellt. Das maximale Mischungsverhältnis in der Grenzschicht bestimmt insbesondere das Hebungskondensationsniveau (HKN).

Als Windprofil des Grundzustandes wird, Weisman und Klemp (1982) folgend, der analytische Ansatz

$$u(z) = u_{\infty} \tanh\left(\frac{z}{z_s}\right) \quad (5.15)$$

mit $z_s = 3$ km verwendet. Dies entspricht einer Anströmung des Simulationsgebiets aus Westen (bzw. in den folgenden Abbildungen von links nach rechts). Die vertikale Windscherung ist für diesen Grundzustand eine reine Geschwindigkeitsscherung, d.h. das Windprofil weist keine Richtungsscherung auf. Das Vertikalprofil der Windgeschwindigkeit ist für verschiedene u_{∞} in Abb. 5.2 dargestellt.

Die wichtigsten Parameter, die eine physikalisch sinnvolle Modifikation des Grundzustandes bzw. der Anfangsbedingung ermöglichen, sind das maximale Mischungsverhältnis in der Grenzschicht q_{max} sowie die maximale Windgeschwindigkeit des Grundstroms u_∞ . Die beiden Maßzahlen, die durch die Anfangsbedingung bzw. den Grundstrom bestimmt werden, sind die konvektiv verfügbare Energie CAPE und die Bulk-Richardson-Zahl Ri. Die konvektiv verfügbare Energie ist durch

$$CAPE = g \int_{NFK}^{NOA} \frac{\theta_{v,p} - \theta_v}{\theta_v} dz \quad (5.16)$$

definiert, wobei $\theta_{v,p}$ die virtuell potentielle Temperatur eines aufsteigenden Luftpakets ist (NFK = Niveau freier Konvektion, NOA = Niveau ohne Auftrieb). Die Bulk-Richardson-Zahl Ri definieren Weisman und Klemp (1982) durch das Verhältnis der konvektiv verfügbaren Energie und der kinetischen Energie der Windscherung:

$$Ri = \frac{CAPE}{\frac{1}{2}(\Delta \bar{u}_s)^2}. \quad (5.17)$$

Dabei ist die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta \bar{u}_s$, die die vertikale Geschwindigkeitsscherung des Grundstroms charakterisiert, nach Weisman und Klemp (1982) durch

$$\Delta \bar{u}_s = \frac{\int_{z=0 \text{ m}}^{z=6000 \text{ m}} \rho_0(z) u(z) dz}{\int_{z=0 \text{ m}}^{z=6000 \text{ m}} \rho_0(z) dz} - \frac{\int_{z=0 \text{ m}}^{z=500 \text{ m}} \rho_0(z) u(z) dz}{\int_{z=0 \text{ m}}^{z=500 \text{ m}} \rho_0(z) dz} \quad (5.18)$$

zu definieren. Das Mischungsverhältnis q_{max} bestimmt insbesondere die Stabilität und damit die konvektiv verfügbare Energie CAPE. Bei größeren maximalen Windgeschwindigkeiten u_∞ tritt in der unteren Troposphäre eine größere Windscherung auf und damit ergeben sich kleinere Werte für die Bulk-Richardson-Zahl Ri (vgl. Abschnitt 2.4).

Um in der durch Gl. (5.13) und Gl. (5.14) gegebenen potentiell instabil geschichteten Atmosphäre Konvektion auszulösen, ist eine zusätzliche Temperaturstörung notwendig, die ausreicht, um ein Luftpaket bis zum Niveau freier Konvektion zu heben. Dies wird meist durch eine Temperaturstörung in Form einer Warmluftblase erreicht, die der Anfangsbedingung aufgeprägt wird (z.B. Klemp und Wilhelmson, 1978; Weisman und Klemp, 1982). Straka und Anderson (1993) und Johnson et al. (1993) erzielen mit dieser Anfangsbedingung eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit Messungen. Carpenter et al. (1998) kritisieren allerdings diesen einfachen Ansatz, da die Strömung innerhalb der konvektiven Grenzschicht nicht richtig wiedergegeben werden kann und empfehlen stattdessen, die Konvektion durch differentielle Erwärmung in der Grenzschicht auszulösen. Ovtchinnikov

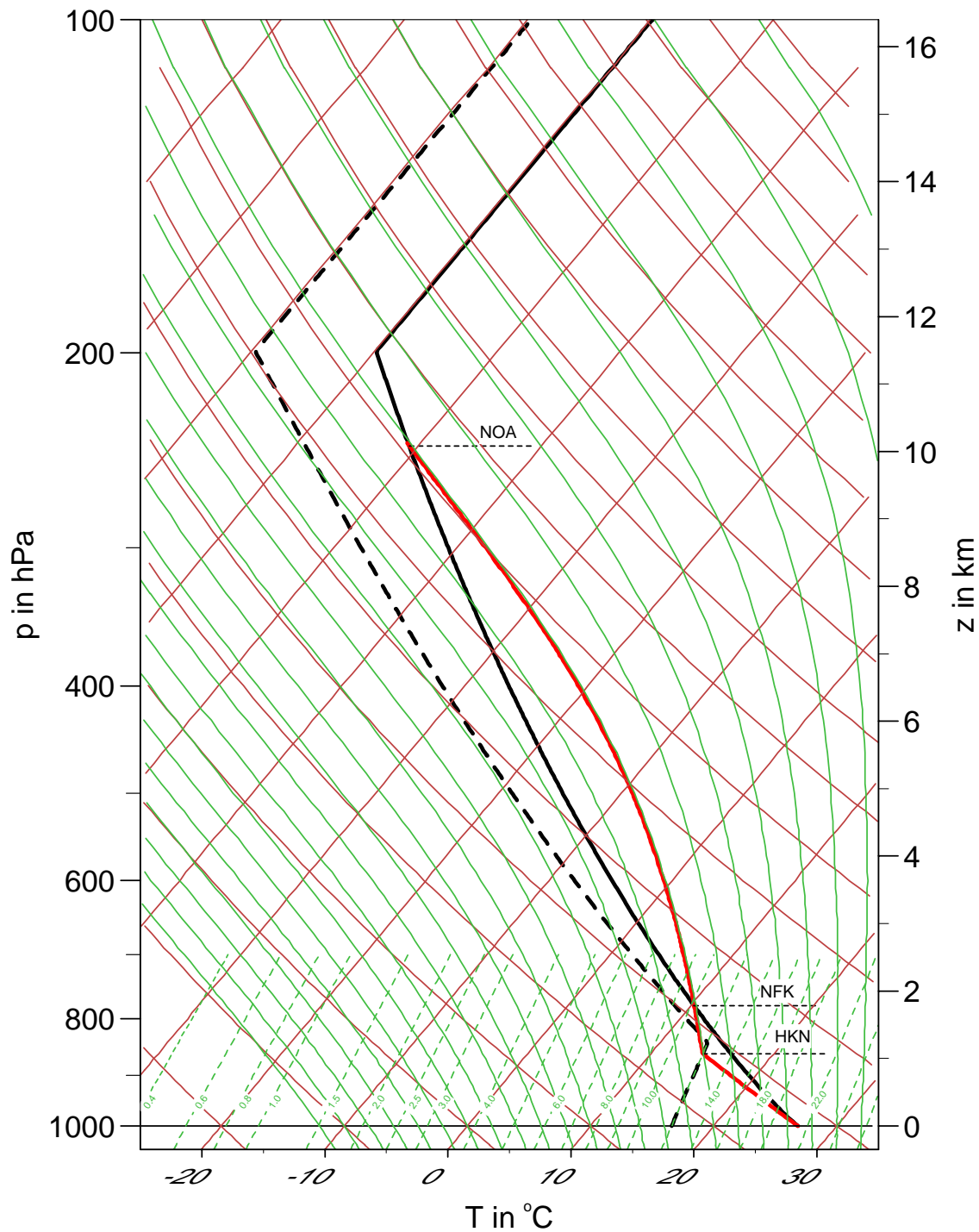


Abbildung 5.3: Skew-T-log-p-Diagramm des Vertikalprofils der Temperatur (—) und der Taupunkttemperatur (- - -) entsprechend Gl. (5.13) und Gl. (5.14) für $q_{\text{max}} = 12 \text{ g kg}^{-1}$. Außerdem ist der Temperaturverlauf für ein aufsteigendes Luftpaket eingezeichnet (dicke rote Linie): trockenadiabatisch für $p < p_{\text{HKN}}$ und pseudoadiabatisch für $p_{\text{HKN}} \leq p < p_{\text{NOA}}$.

und Kogan (2000) verwenden als Anfangsbedingung eine Warmluftblase mit zusätzlichen kleinskaligen stochastischen Fluktuationen und erhalten damit eine realistischere Entwicklung als mit der ungestörten Warmluftblase. Im folgenden wird trotz dieser neueren Ansätze aus zwei Gründen an der ungestörten Warmluftblase festgehalten: Zum einen bleibt damit die Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit den Arbeiten von Weisman und Klemp (1982,1984) erhalten und zum anderen sind für die von Carpenter et al. (1998) sowie Ovtchinnikov und Kogan (2000) empfohlenen Initialisierungsverfahren deutlich höhere horizontale Auflösungen des numerischen Gitters erforderlich als sie im folgenden verwendet werden. Weisman und Klemp (1982) folgend wird dem Temperaturfeld der Anfangsbedingung eine Warmluftblase der Form

$$T(x, y, z) = T_0(z) + \Delta T_b \cos \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{x - x_{b,c}}{x_{b,r}} \right)^2 + \left(\frac{y - y_{b,c}}{y_{b,r}} \right)^2 + \left(\frac{z - z_{b,c}}{z_{b,r}} \right)^2} \right]^2 \quad (5.19)$$

mit $\Delta T_b = 2$ K, $x_{b,r} = y_{b,r} = 10$ km und $z_{b,r} = z_{b,c} = 1.4$ km aufgeprägt. Die horizontale Lage wird entsprechend der Gebietsgröße und der Anströmung gewählt, im folgenden meist $x_{b,c} = 25$ km und $y_{b,c} = 50$ km.

5.3 Simulation der Entwicklung thermischer Konvektion

Im folgenden werden die Resultate einiger Simulationen der Entwicklung konvektiver Systeme unter den beschriebenen idealisierten Bedingungen dargestellt. Ziel ist es, die Möglichkeiten, aber auch Grenzen des neu entwickelten Wolkenmodells aufzuzeigen. Auf viele Details, sowohl der Wolkenmikrophysik als auch der Dynamik, kann dabei nicht tiefer eingegangen werden - dies bleibt späteren Arbeiten überlassen.

Um einen Überblick über die Variabilität und Sensitivität der simulierten konvektiven Systeme zu geben, wird neben den Unterschieden zwischen maritimen und kontinentalen Bedingungen auch der Einfluss des Grundzustandes anhand der Parameter u_∞ und q_{max} untersucht. Außerdem wird ein Vergleich mit der Kesslerschen Parametrisierung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse durchgeführt. Simulationen mit verschiedener horizontaler und vertikaler Auflösung zeigen den Einfluss der Numerik auf die Ergebnisse. In Tabelle 5.3 sind für die einzelnen Simulationen die verschiedenen Parameter dargestellt.

Tabelle 5.3: Parameterwerte und Maßzahlen für die einzelnen Simulationen.

Index	Gebiet $L_x \times L_y$ in km \times km	Numerik			Grundzustand				Wolkenphysik
		Δx in m	$\overline{\Delta z}$ in m	Δz_{min} in m	u_∞ in m s^{-1}	q_{max} in g kg^{-1}	CAPE in J kg^{-1}	Ri	CCN-Typ
1	100 \times 100	1000	300	150	5	12	1257	259	maritim
2	100 \times 100	1000	300	150	5	12	1257	259	kontinental
3	100 \times 100	1000	300	150	5	12	1257	259	(Kessler-Schema)
4	100 \times 100	500	200	100	5	12	1257	259	maritim
5	100 \times 250	1000	300	150	20	12	1257	16	maritim
6	100 \times 250	1000	300	150	20	12	1257	16	kontinental
7	100 \times 250	1000	300	150	20	14	2280	20	maritim
8	100 \times 100	1000	300	150	5	14	2280	471	maritim
9	100 \times 100	1000	300	150	5	14	2280	471	kontinental

5.3.1 Simulation gewöhnlicher Einzelzellen

Bei niedrigen Windgeschwindigkeiten des Grundstroms bzw. großen Bulk-Richardson-Zahlen entstehen bevorzugt gewöhnliche Einzelzellen. Dies sind kurzlebige konvektive Systeme, die jedoch lokal durchaus zu hohen Niederschlagsmengen führen können.

Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 12 \text{ g kg}^{-1}$, maritim

Die erste Simulation zeigt die Entwicklung einer solchen gewöhnlichen Einzelzelle unter maritimen Bedingungen bei einer Anströmung von $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$ (vgl. Tabelle 5.3). In Abbildung 5.4 sind in einem xz -Schnitt die Massendichten der Hydrometeore in kg m^{-3} nach einer Simulationszeit von 18 min sowie die Niederschlagsrate am Boden dargestellt. Die verschiedenen Farben sind den einzelnen Hydrometeorklassen zuzuordnen (blau = Wolkentropfen, orange = Regentropfen, gelb = Wolkeneis, grün = Schnee, magenta = Graupel). Nach 18 min hat sich in diesem Fall eine Cumuluswolke mit Aufwindgeschwindigkeiten bis zu 17 m s^{-1} ausgebildet, deren Wolkenobergrenze ca. 6 km Höhe erreicht. Der maximale Wolkenwassergehalt beträgt ca. 7 g m^{-3} . Durch Koagulation (Autokonversion, Akkreszenz) sind bereits Regentropfen entstanden; der maximale Regenwassergehalt beträgt in 5 km Höhe ca. 9.5 g m^{-3} . Die Regentropfen werden wie auch die Wolkentropfen im Aufwind nach oben

transportiert. Im Gegensatz zu den Wolkentropfen gefrieren die Regentropfen (heterogenes Gefrieren) und bilden Graupel, wie man in Abb. 5.5 erkennt, die die Massendichten nach 21 min zeigt. In Abbildung 5.6 ist der xz -Schnitt der Massendichten nach 36 min dargestellt: Es ist ein voll ausgebildeter Cumulonimbus entstanden und man erkennt deutlich den aus Wolkeneis bestehenden Amboss in der oberen Troposphäre. Im Aufwindschlauch mit Vertikalwindgeschwindigkeiten von ca. 20 m s^{-1} treten nun auf Grund des Abbaus von Wolkenwasser durch Akkreszenz und Bereifen nur noch Wolkenwassergehalte von 4 g m^{-3} auf. Regentropfen sind im Aufwindgebiet bis in eine Höhe von 7 km zu finden. Die dominante Hydrometeorart ist Graupel, der sowohl durch Gefrieren von Regentropfen als auch durch Bereifen von Wolkeneis entsteht. Unterhalb von 4 km Höhe schmelzen die Graupelpartikel. Der Niederschlag am Boden, der, wie später noch gezeigt wird, nach 30 min Simulationszeit einsetzt, besteht deshalb in erster Linie aus Regen - jedoch erreicht auch ein Teil des Graupels, der hier sinnvollerweise als Hagel zu interpretieren ist, den Erdboden. Die Niederschlagsrate beträgt im Maximum ca. 500 mm h^{-1} ; derart hohe Niederschlagsraten treten allerdings nur für kurze Zeit und in einem eng begrenzten Gebiet auf. Unterhalb der Wolkenbasis sind bereits die durch den Niederschlag verursachten Abwinde zu erkennen. Abbildung 5.7 zeigt eine Maximalprojektion der Radarreflektivität in dBZ (siehe Anhang B) auf die Seitenflächen des dreidimensionalen Simulationsgebietes (sog. MAX-CAPPI-Darstellung, CAPPI = 'constant altitude plan position indicator'). Hier erkennt man die dreidimensionale Struktur und insbesondere den Bereich, in dem die größte Niederschlagsintensitäten und damit verbunden die höchsten Reflektivitäten von bis zu 68.6 dBZ auftreten. Gut sichtbar ist auch der Amboss, der sich mit dem mittleren Wind nach Osten, d.h. in der Abbildung von links nach rechts, ausbreitet. Auf Grund des als Anfangsbedingung vorgegebenen geradlinigen Windprofils ist das Simulationsergebnis in y -Richtung symmetrisch; Abweichungen von der Symmetrie sind auf numerische Probleme zurückzuführen. Abbildung 5.8 zeigt wiederum einen xz -Schnitt der Massendichten nach 54 min. Man erkennt, dass das bisher dominante konvektive Aufwindgebiet nur noch schwach ausgeprägt ist, die bodennahen Abwinde haben sich jedoch noch deutlich verstärkt.

Die Simulationsergebnisse zeigen demnach den typischen Entwicklungszyklus einer Einzelzelle, wobei die Abbildungen 5.4 und 5.5 der Entwicklungsphase, die Abbildungen 5.6 und 5.7 der Reifephase und Abbildung 5.8 der Dissipationsphase zuzuordnen sind. Schnee tritt während der gesamten Entwicklung nicht in signifikanten Massendichten auf, was jedoch auch darauf zurückzuführen ist, dass Schnee bei den in konvektiven Wolken auftretenden hohen Wolkenwassergehalten sehr schnell bereift. Aus den Resultaten kann ohne eine genauere Un-

tersuchung der Umwandlungsraten deshalb nicht geschlossen werden, dass die Aggregation des Wolkeneises vernachlässigbar ist.

Simulation 2: $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 12 \text{ g kg}^{-1}$, kontinental

Unter kontinentalen Bedingungen ist die Koagulation auf Grund der grundsätzlich kleineren Wolkentropfen weniger effizient. Dies zeigt Simulation 2, der das kontinentale CCN-Spektrum zu Grunde liegt: In Abbildung 5.9 ist ein xz -Schnitt der Massendichten und der Niederschlagsrate nach 18 min dargestellt. Im Gegensatz zum maritimen Fall hat sich noch kein Regen gebildet und dies obwohl der Wolkenwassergehalt mehr als 10 g m^{-3} beträgt! Erst nach 21 min (siehe Abb. 5.10), nachdem die Wolkenobergrenze eine Höhe von 8 km erreicht hat, erkennt man, dass in 7 km Höhe Regentropfen und Graupel entstanden sind. Nach 42 min hat sich auch unter kontinentalen Bedingungen ein voll ausgebildeter Cumulonimbus entwickelt (Abb. 5.11). Der auffälligste Unterschied zum maritimen Fall ist der deutlich stärker ausgebildete Amboss, der größtenteils aus Flüssigwasser in Form von Wolkentropfen besteht. Offensichtlich wird unter kontinentalen Bedingungen das Wolkenwasser nicht so schnell abgebaut wie im maritimen Fall. Nach 54 min (Abb. 5.12) sind im kontinentalen Fall noch starke Aufwinde erkennbar, d.h. dieser Zeitpunkt ist noch der Reifephase zuzuordnen, wenig später setzt aber auch bei dieser Simulation die Dissipationsphase ein.

Die unterschiedliche Entwicklung unter maritimen und kontinentalen Bedingungen erkennt man auch deutlich anhand der Zeitreihen der Maximalwerte der Massendichten der Hydrometeore im gesamten Simulationsgebiet, die in den Abbildungen 5.13 und 5.14 dargestellt sind. Unter maritimen Bedingungen (Abb. 5.13) bilden sich bereits nach ca. 15 min Regentropfen, die dann wenig später, wenn sie durch den Aufwind in höhere, kältere Schichten transportiert werden, Graupel bilden. Wolkeneis entsteht erst später und spielt bei der Niederschlagsbildung nur eine untergeordnete Rolle. Im Gegensatz dazu bilden sich im kontinentalen Fall erst nach ca. 20 min Niederschlagspartikel in Form von Regen und Graupel. Wenig später entsteht auch Wolkeneis. Der Wolkenwassergehalt erreicht als Maximalwert ca. 12 g m^{-3} im Gegensatz zu ca. 7 g m^{-3} im maritimen Fall. Bei derart hohen Wolkenwassergehalten kann selbst unter kontinentalen Bedingungen Regen durch Koagulation entstehen. Betrachtet man die in den Abbildungen 5.15 und 5.16 dargestellten xz -Schnitte der Autokonversions- und Akkreszenzraten, so erkennt man deutlich, dass die Niederschlagsbildung unter diesen Bedingungen auch im kontinentalen Fall durch Koagulation von Wolkentropfen, die Bildung von Regentropfen (Autokonversion), anschließendes Akkreszenzwachstum und heterogenes

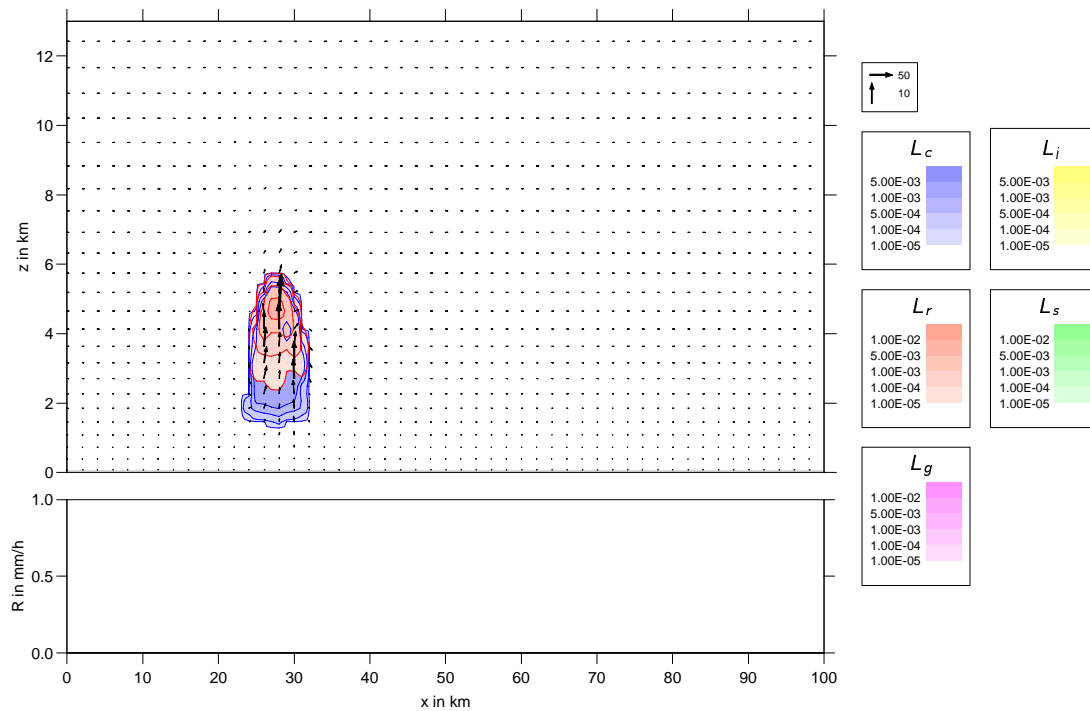


Abbildung 5.4: Massendichten der Hydrometeore in kg m^{-3} und Niederschlagsrate am Boden in mm h^{-1} im xz -Schnitt bei $y = 50 \text{ km}$ nach 18 min (blau = Wolkentropfen, rot = Regentropfen, gelb = Wolkeneis, grün = Schnee, magenta = Graupel). Die Vektorpfeile stellen an jedem zweiten Gitterpunkt den Windvektor in m s^{-1} dar, wobei die Längenskala im obersten Kasten der Legende angegeben ist (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

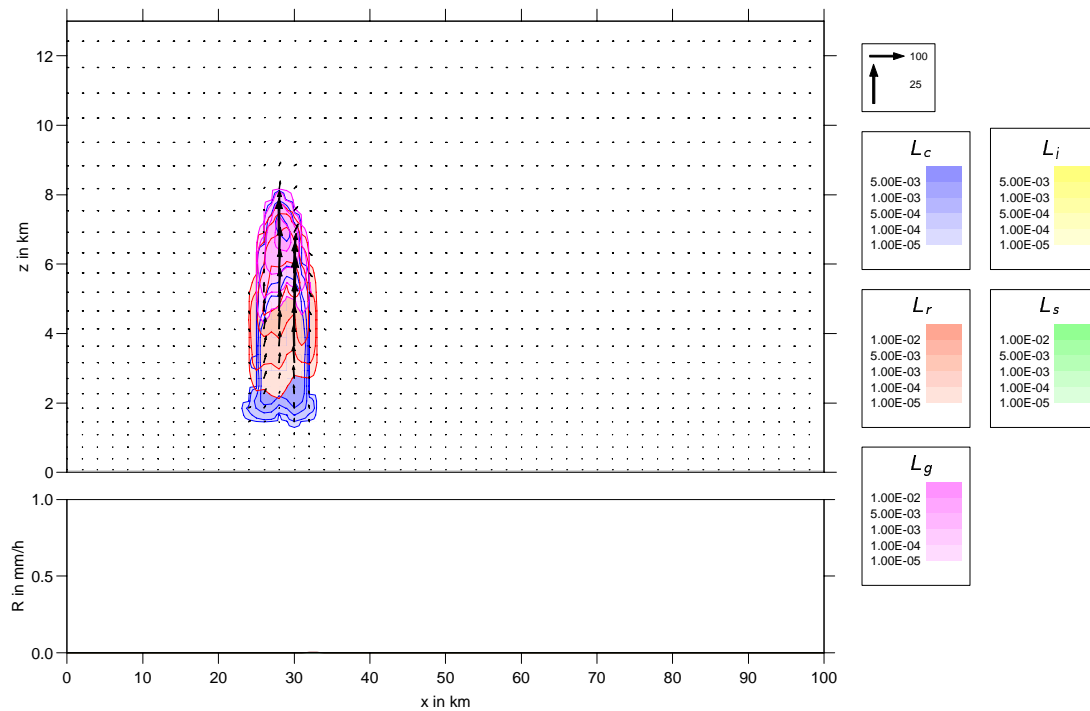


Abbildung 5.5: Wie Abb. 5.4, aber nach 21 min (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

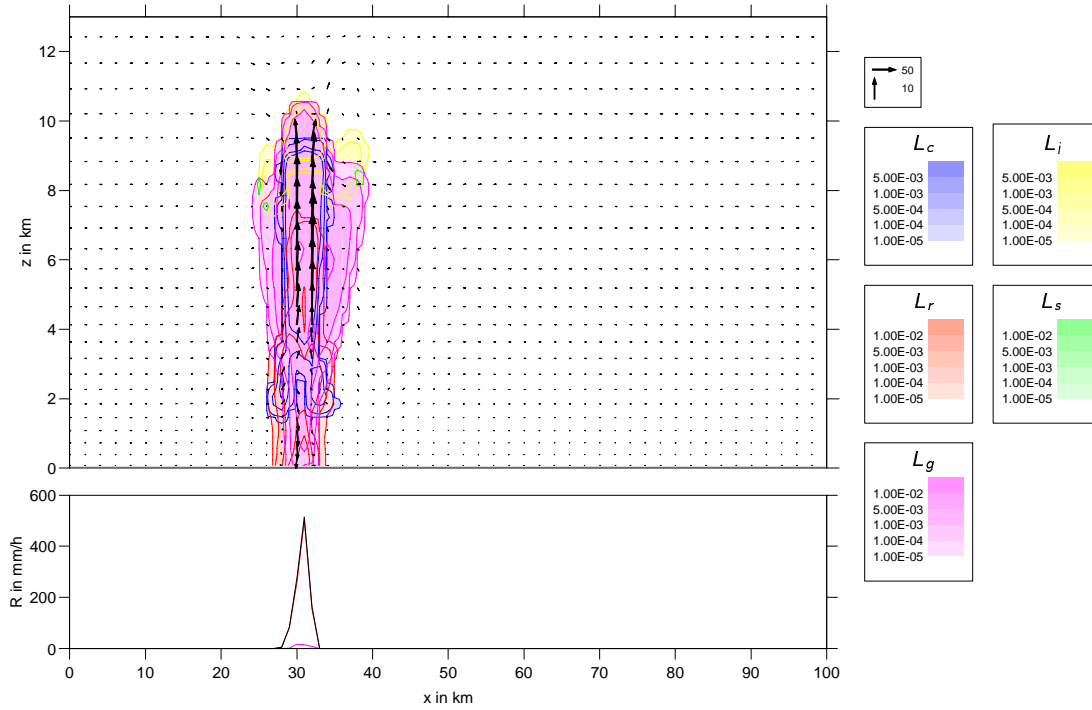


Abbildung 5.6: Wie Abb. 5.4, aber nach 36 min (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

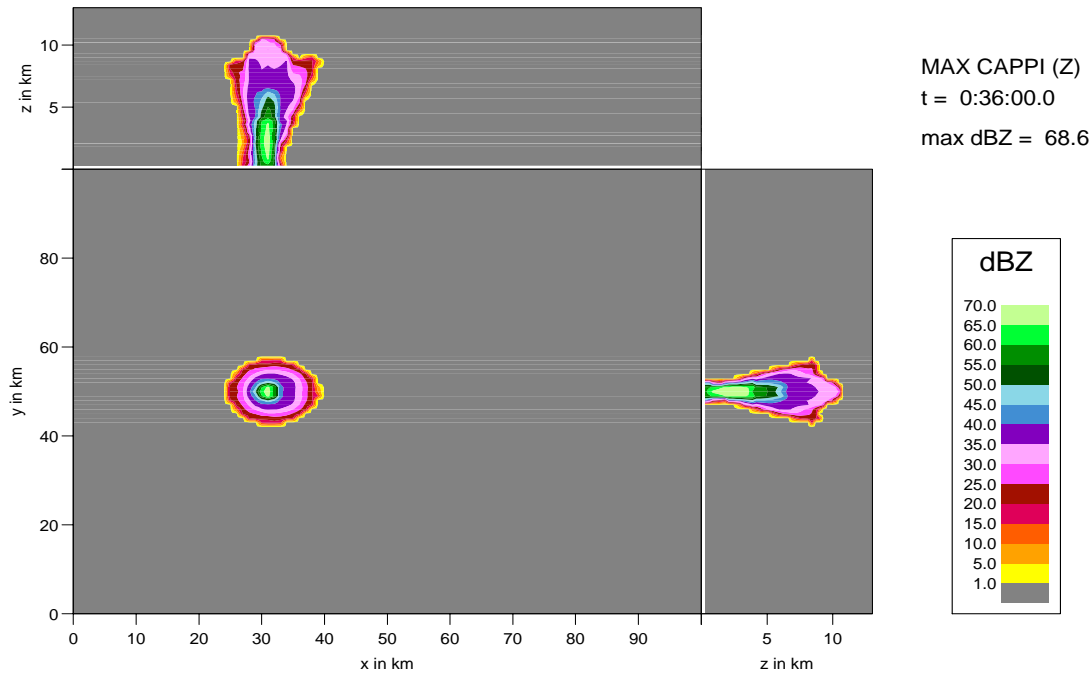


Abbildung 5.7: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 36 min (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

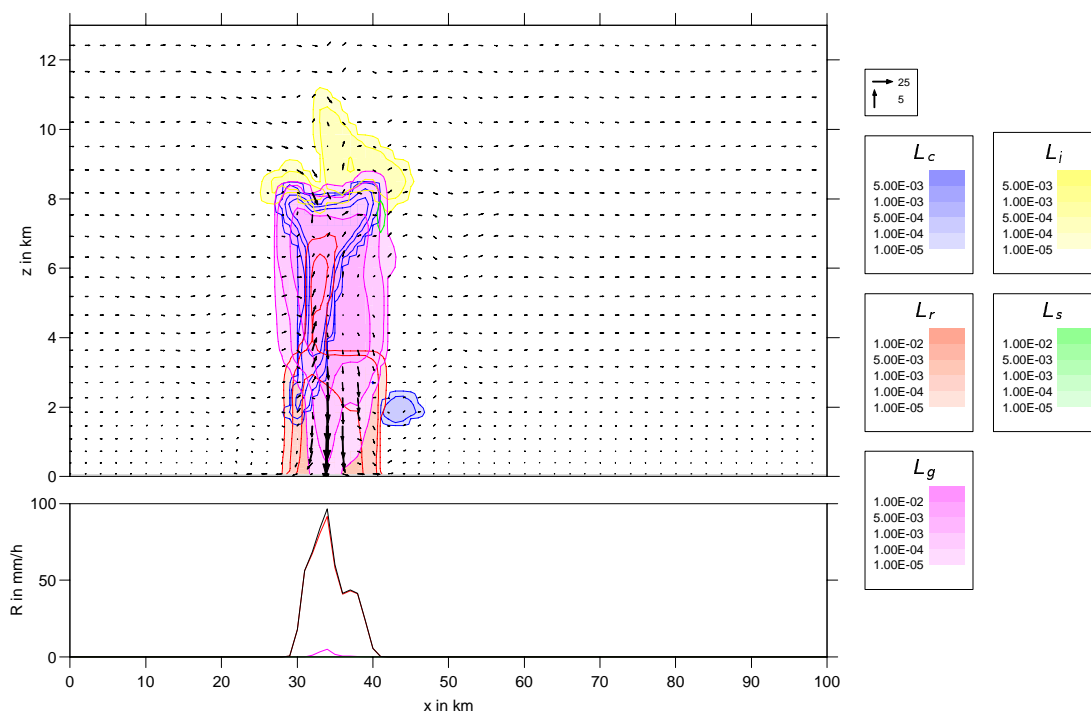


Abbildung 5.8: Wie Abb. 5.4, aber nach 54 min (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

Gefrieren dieser Regentropfen zu Graupel erfolgt.

Entscheidend für die unterschiedliche wolkenmikrophysikalische Entwicklung unter maritimen und kontinentalen Bedingungen ist das Angebot an Kondensationskernen, das wiederum direkt die Anzahl bzw. den mittleren Durchmesser der Wolkentropfen beeinflusst. In den Abbildungen 5.17 bzw. 5.18 sind die mittleren Durchmesser der Wolkentropfen nach 21 min in einem xz-Schnitt dargestellt. Unter maritimen Bedingungen (Abb. 5.17) erreichen die Wolkentropfen einen mittleren Durchmesser von bis zu $27 \mu\text{m}$, während die Wolkentropfen unter kontinentalen Verhältnissen deutlich kleiner sind und nur mittlere Durchmesser von ca. $18 \mu\text{m}$ erreichen (Abb. 5.18). Deutlich erkennt man auch, dass die im maritimen Fall bereits entstandenen Graupelpartikel (vgl. Abb. 5.5) selektiv die größeren Wolkentropfen einsammeln, weshalb über 6 km Höhe der mittlere Wolkentropfendurchmesser unter $20 \mu\text{m}$ liegt. Die Autokonversionsrate ist gemäß Gleichung (3.76) proportional zu \bar{x}_c^2 bzw. \bar{D}_c^6 , wodurch sich die großen Unterschiede insbesondere der Koagulation der Wolkentropfen unter maritimen und kontinentalen Bedingungen ergeben.

Trotz der Unterschiede in den wolkenmikrophysikalischen Prozessen zeigen beide Simulationen die typischen Charakteristika einer gewöhnlichen Einzelzelle, d.h. durch den entstehenden Niederschlag kommt der Aufwind zum Erliegen, da die Zufuhr an feuchter, warmer

Luft unterbrochen wird und nach 1-2 Stunden das Niederschlagsereignis endet. Dies zeigen auch die Zeitreihen der maximalen Auf- und Abwindgeschwindigkeiten sowie der integralen Niederschlagsrate in den Abbildungen 5.19 und 5.20. In diesen Zeitreihen erkennt man aber auch deutlich, dass beide Einzelzellen ein bi- bzw. trimodales zeitliches Verhalten zeigen. Die Ursache ist darin zu sehen, dass bereits bei diesen moderaten Windgeschwindigkeiten durch die Abwinde neue konvektive Aufwindgebiete initiiert werden. Diese Art der Entwicklung wird auch von Weisman und Klemp (1982) beschrieben und stellt den Übergang zum Multizellenregime dar. Im folgenden wird der Begriff des Multizellensystems jedoch enger gefasst und nur dann verwendet, wenn räumlich getrennte Niederschlagsgebiete (z.B. im MAX-CAPPI) erkennbar sind, was hier nicht der Fall ist.

Simulation 3: Kessler-Schema (ohne Eisphase)

Das Kessler-Schema, das nur die Massendichten der Wolken- und Regentropfen als Modellvariable verwendet, wird in vielen Wettervorhersage- und Klimamodellen zur Beschreibung des (skaligen) Niederschlags verwendet. Dabei werden meist die von Kessler (1969) angegebenen Parameterwerte verwendet (vgl. Abschnitt 3.2.1). Da das Kessler-Schema eine Ein-Momenten-Parametrisierung ist, können keine Abhängigkeiten der Umwandlungsraten von den mittleren Partikeldurchmessern berücksichtigt werden.

Simulation 3 wurde mit den gleichen Grundzustands- und Anfangsbedingungen durchgeführt wie die Simulationen 1 und 2: Die Abbildungen 5.21 und 5.22 zeigen die xz -Schnitte der Hydrometeormassendichten nach einer Simulationszeit von 18 min bzw. 21 min. Vergleicht man die Entwicklung mit dem maritimen Fall (Simulation 1, Abb. 5.4 und 5.5), so zeigt sich, dass das Kessler-Schema zu einer deutlich schnelleren und intensiveren Niederschlagsbildung führt. Nach 21 min beträgt die Niederschlagsrate am Boden bereits 20 mm h^{-1} , während im maritimen Fall des Zwei-Momenten-Mischwolkenchemas noch kein Niederschlag den Boden erreicht. Dies ist zum einen darauf zurückzuführen, dass die von Kessler (1969) vorgeschlagene Parametrisierung der Autokonversionsrate zu einer unrealistisch schnellen Umwandlung der Wolkentropfen in Regentropfen führt. Zum anderen hängt die Sedimentation der Regentropfen in einem Ein-Momenten-Schema nur vom Regenwassergehalt ab, da keine Information über die Tropfengröße vorliegt. Letzteres führt dazu, dass die Sedimentation der Regentropfen während der Entwicklungsphase der Konvektion deutlich überschätzt wird. Ein Zwei-Momenten-Schema kann hier die physikalischen Zusammenhänge besser wiedergeben, da auch bei den hohen Regenwassergehalten, wie sie im

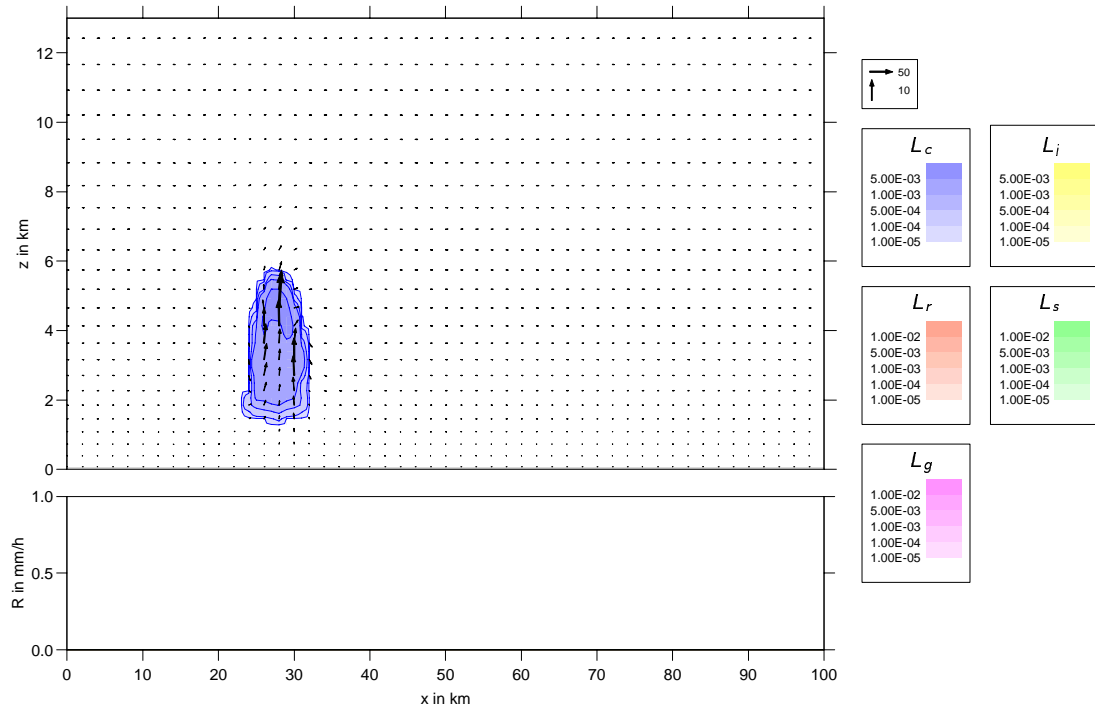


Abbildung 5.9: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 2 nach 18 min (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

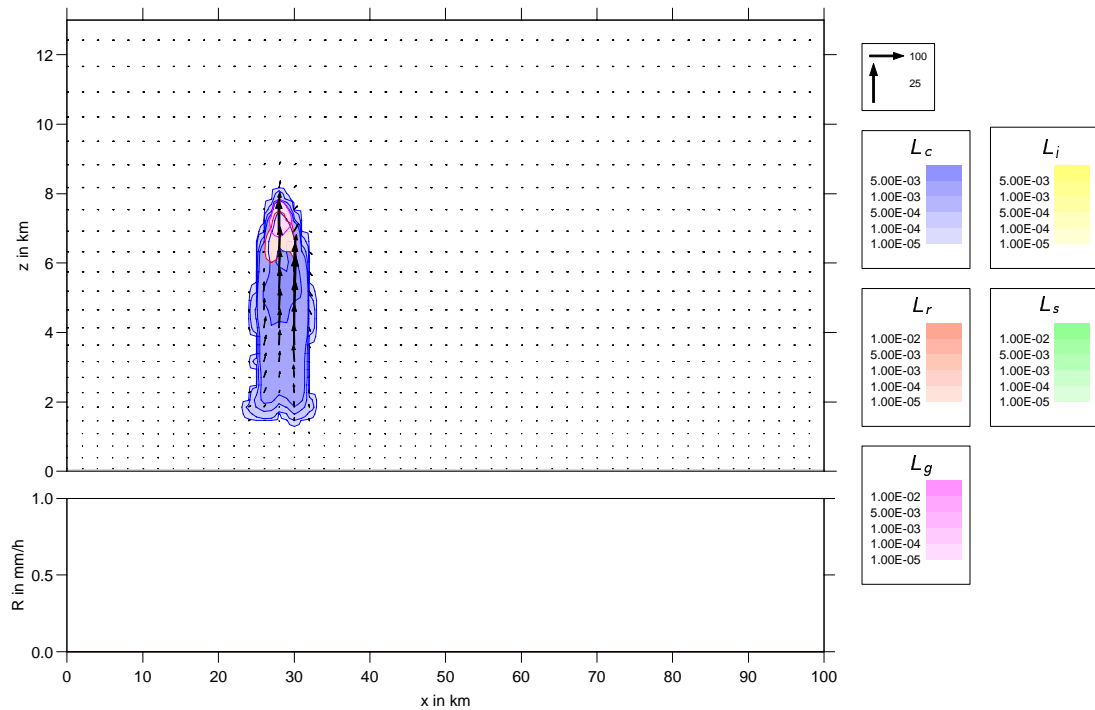


Abbildung 5.10: Wie Abb. 5.9, aber nach 21 min (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

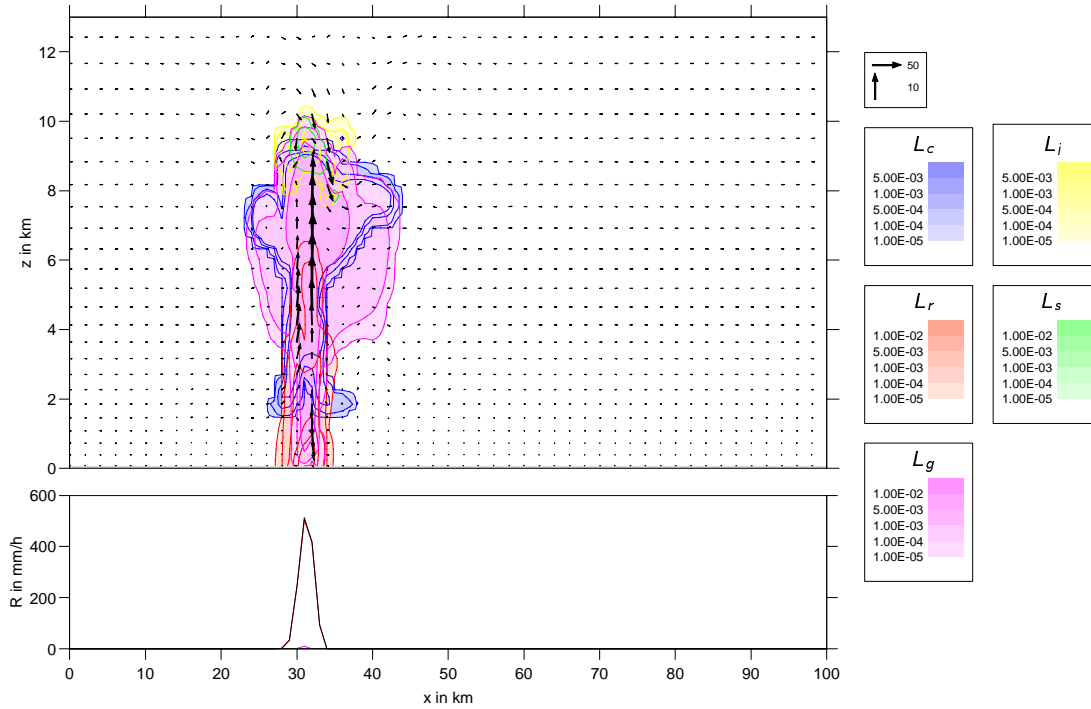


Abbildung 5.11: Wie Abb. 5.9, aber nach 42 min (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

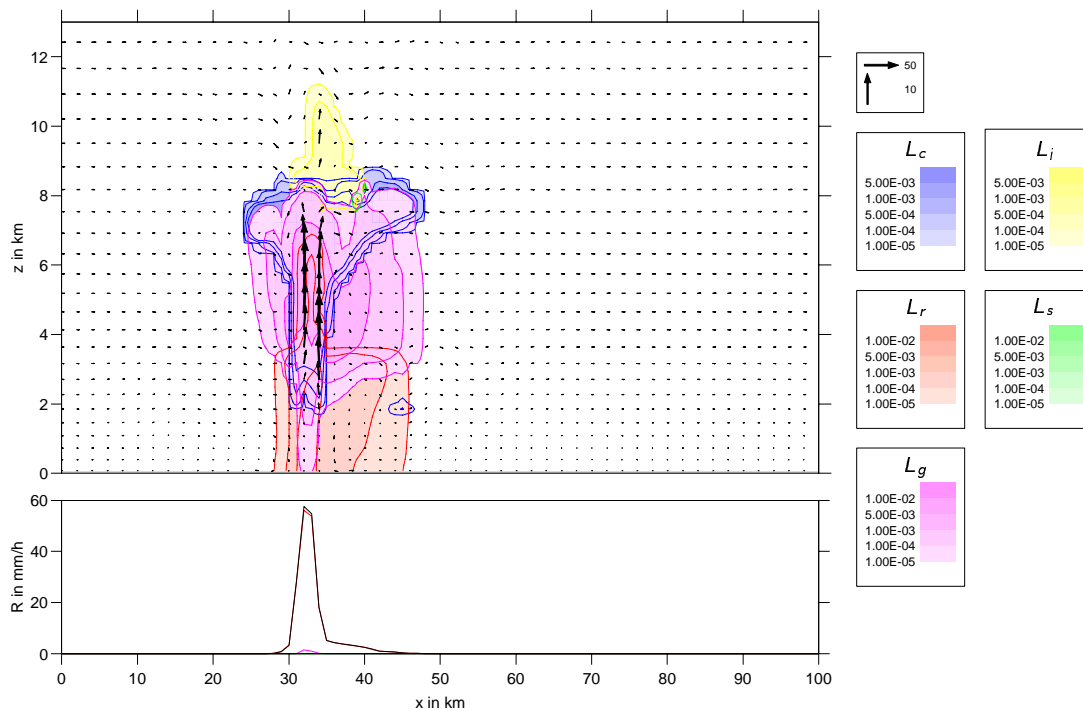


Abbildung 5.12: Wie Abb. 5.9, aber nach 54 min (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

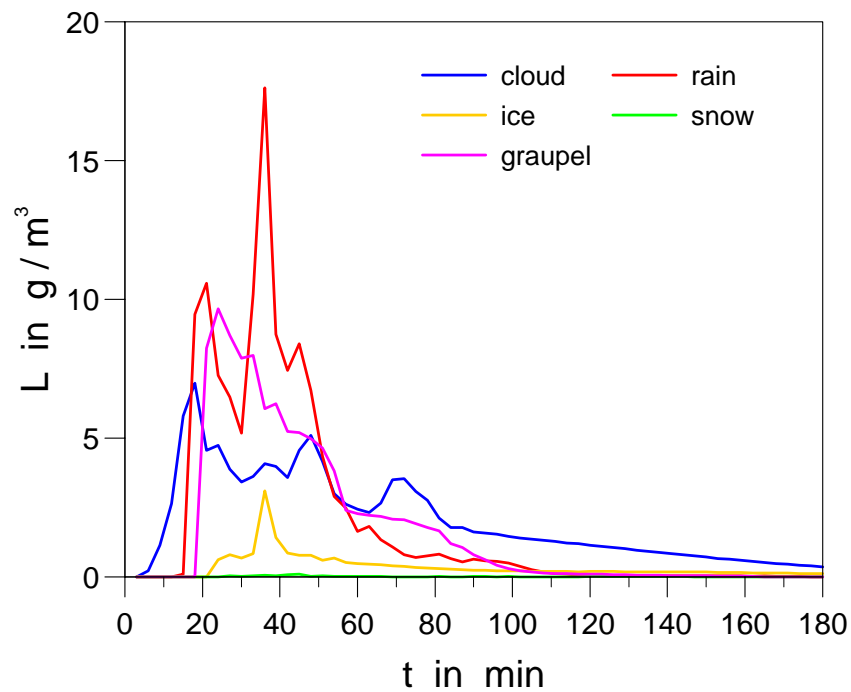


Abbildung 5.13: Zeitreihe der Maximalwerte der Massendichten der Hydrometeore in g m^{-3} im gesamten Simulationsgebiet (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

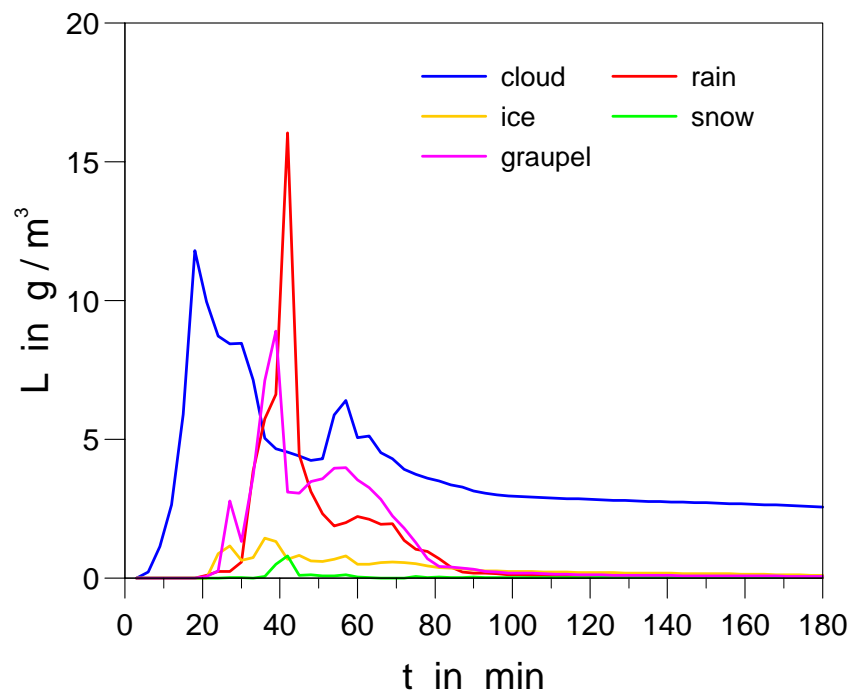


Abbildung 5.14: Wie Abb. 5.13, aber für Simulation 2 (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

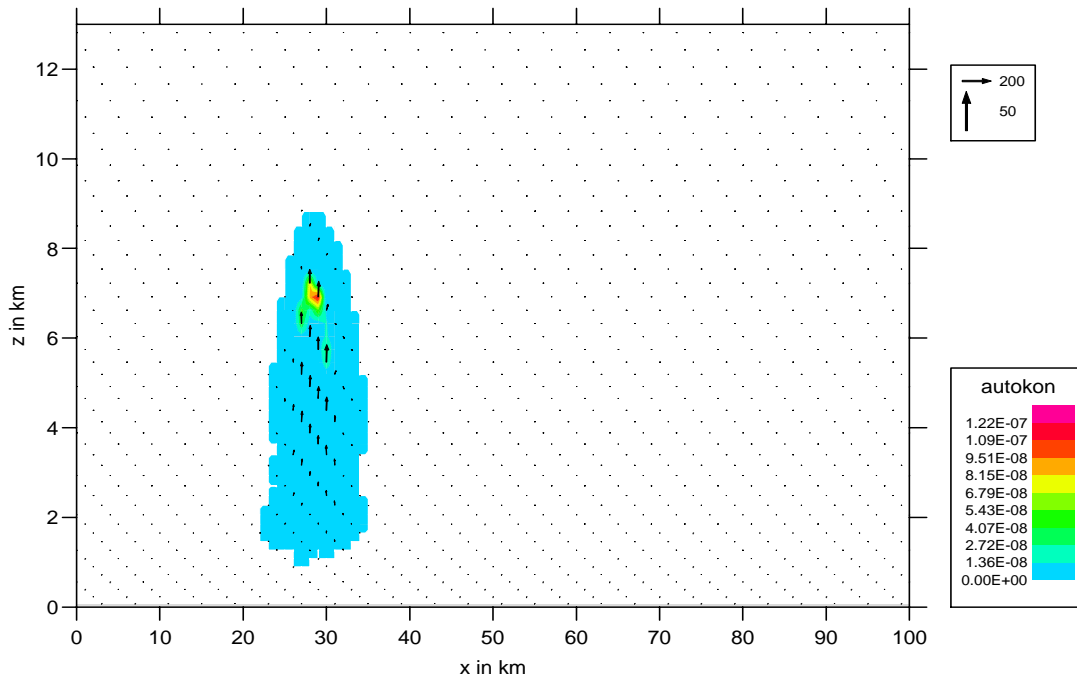


Abbildung 5.15: Autokonversionsrate in $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$ im xz -Schnitt bei $y = 50 \text{ km}$ nach 21 min. Die Vektorpfeile stellen an jedem zweiten Gitterpunkt den Windvektor in m s^{-1} dar (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

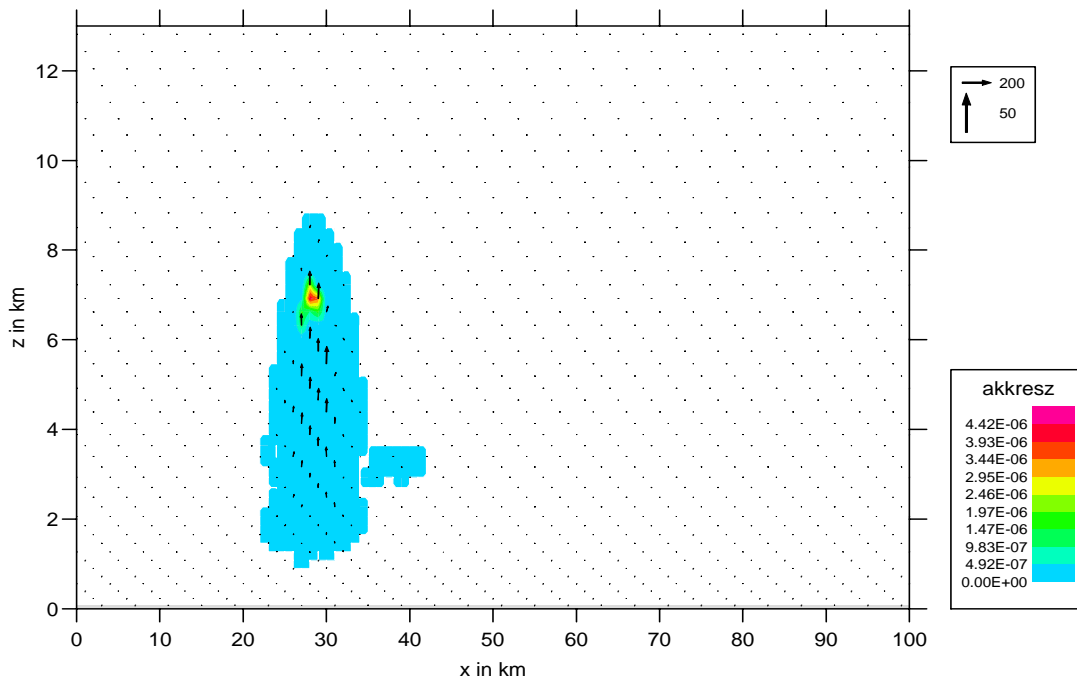


Abbildung 5.16: Wie Abb. 5.15, dargestellt ist jedoch die Akkreszenzrate in $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$ (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

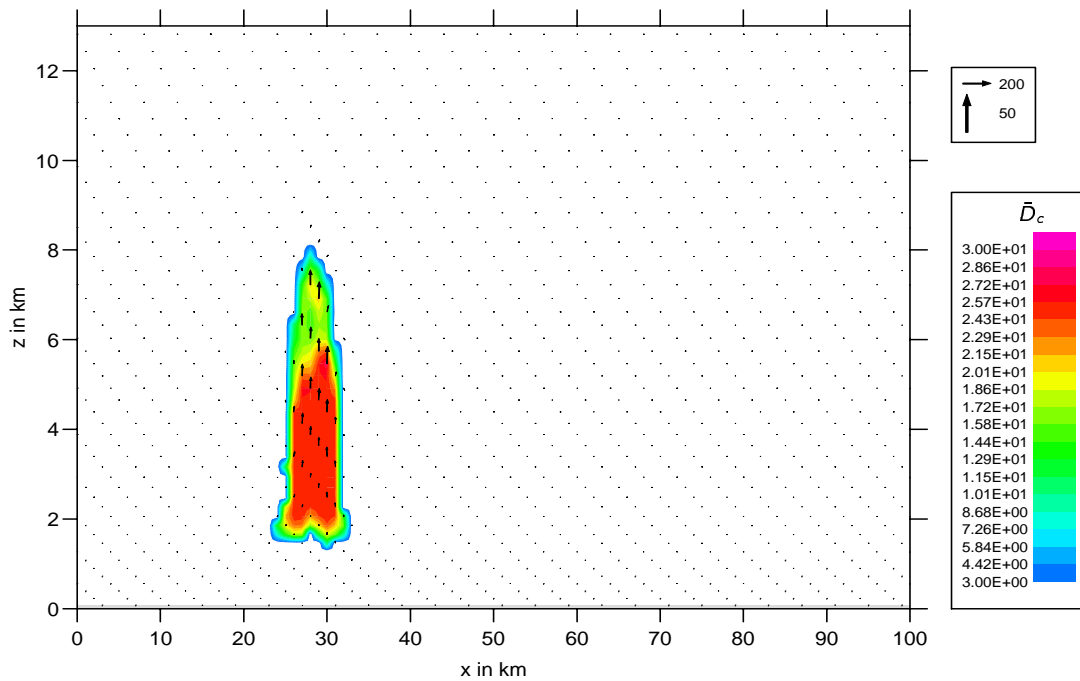


Abbildung 5.17: Mittlerer Durchmesser der Wolkentropfen in μm im xz -Schnitt bei $y = 50 \text{ km}$ nach 21 min. Die Vektorpfeile stellen an jedem zweiten Gitterpunkt den Windvektor in m s^{-1} dar (Simulation 1: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

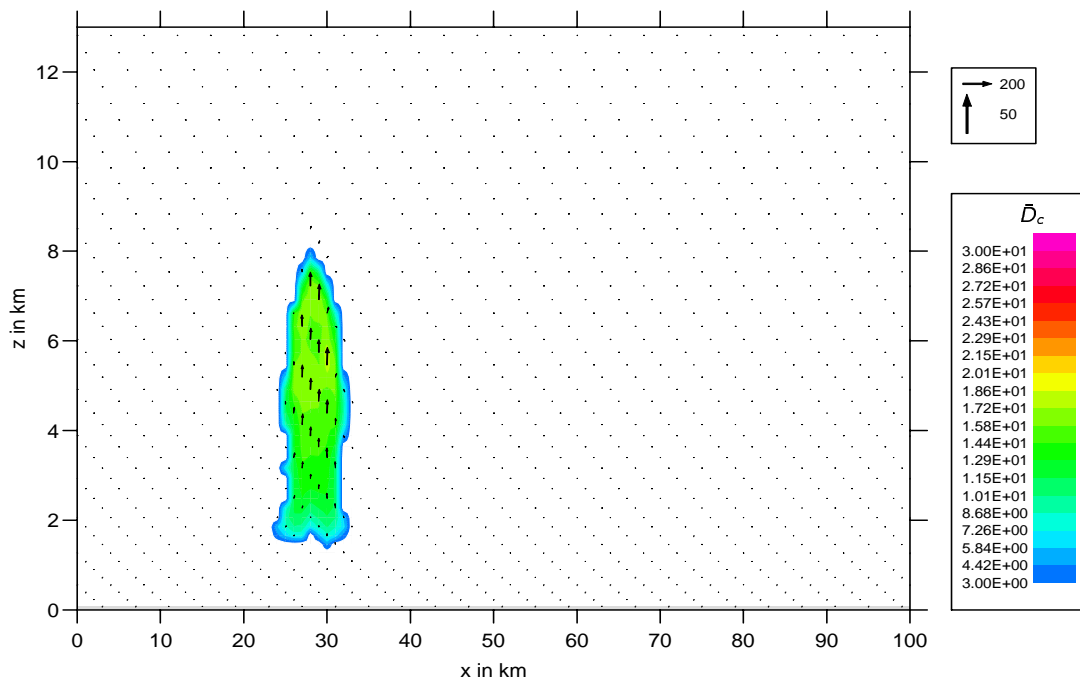


Abbildung 5.18: Wie Abb. 5.17, aber für Simulation 2 (Simulation 2: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

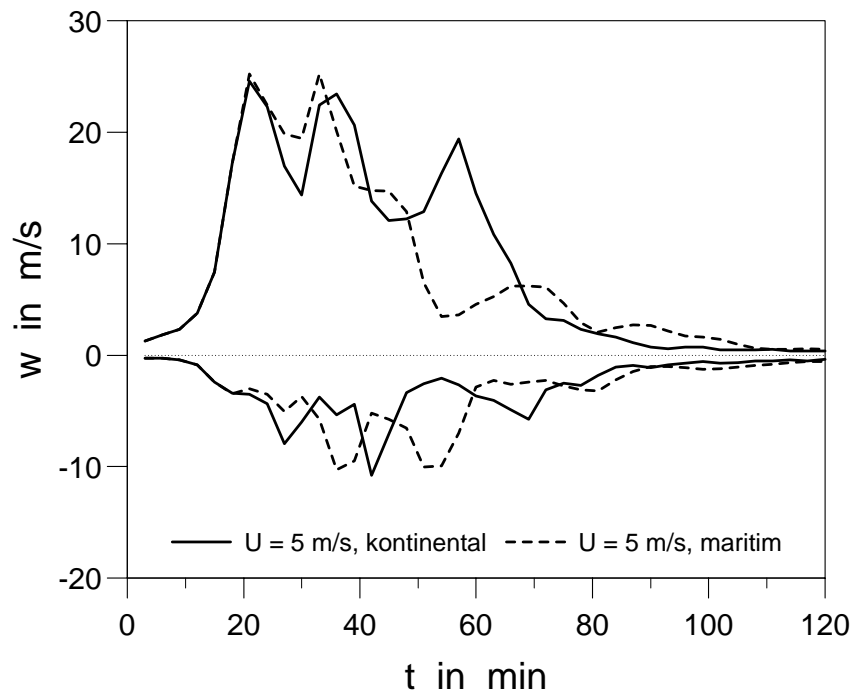


Abbildung 5.19: Zeitreihe der maximalen Auf- und Abwindgeschwindigkeiten in $m s^{-1}$ im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 2 ($u_{\infty} = 5 m s^{-1}$).

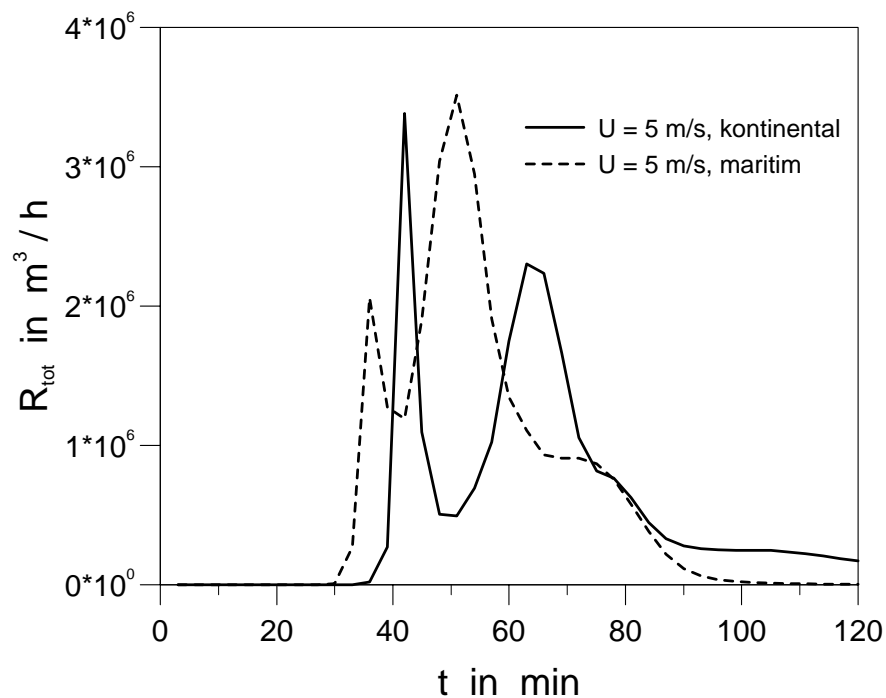


Abbildung 5.20: Zeitreihe der integralen Niederschlagsrate in $m^3 h^{-1}$ im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 2 ($u_{\infty} = 5 m s^{-1}$).

Aufwindbereich auftreten, die kleinen Regentropfen durch den Vertikalwind nach oben transportiert werden. Beide Parametrisierungsannahmen führen dazu, dass sich die Konvektion, wie in Abb. 5.23 zu erkennen ist, nur bis in 10 km Höhe erstreckt. Ein Vergleich der in Abb. 5.24 dargestellten Radarreflektivität nach 36 min mit den Ergebnissen des Mischwolkenchemas zeigt ähnlich hohe maximale Reflektivitäten; diese treten jedoch in der mittleren Troposphäre auf, statt wie im Fall des Mischwolkenchemas im Bereich der Schmelzzone. Außerdem entsprechen die erreichten Maximalwerte von über 64 dBZ in diesem Fall unrealistisch hohen Regenwassergehalten von über 20 g m^{-3} . Der in Abb. 5.25 dargestellte Verlauf der maximalen Auf- und Abwindgeschwindigkeiten zeigt, dass die intensivere Niederschlagsbildung des Kessler-Schemas zu einem etwas ausgeprägteren ersten Minimum der Aufwindgeschwindigkeit führt. Hingegen sind die Abwinde im Fall des Mischwolkenchemas (Simulation 1, maritim) stärker ausgeprägt, was auf die zusätzliche Abkühlung durch schmelzende Graupelpartikel zurückzuführen ist. Auf Grund der gezeigten Unterschiede ist zu erwarten, dass das Kessler-Schema in der Summe mehr Niederschlag erzeugt als das Zwei-Momenten-Mischwolkenchema; dies bestätigt Abb. 5.26, in der die Zeitreihen der integralen Niederschlagssumme dargestellt sind. Der Niederschlag setzt im Fall des Kessler-Schemas nicht nur früher ein, sondern ist auch intensiver. Dies führt dazu, dass insgesamt ca. 30 % mehr Niederschlag den Boden erreicht als im Fall des Mischwolkenchemas.

Simulation 4: Hohe räumliche Auflösung

Auf Grund der nicht vorhandenen Skalentrennung atmosphärischer Prozesse ist es bei der Anwendung numerischer Atmosphärenmodelle stets erforderlich, die Sensitivität der Simulationsergebnisse im Hinblick auf Änderungen der räumlichen Auflösung zu untersuchen. Durch ein feineres Rechengitter werden insbesondere mehr Strukturen des Windfeldes explizit aufgelöst. Außerdem hängt das in der vorliegenden Arbeit verwendete Nukleationsschema, das die Anzahldichten der Wolkentropfen und des Wolkeneises bestimmt, empfindlich von der Übersättigung ab, die bei der groben Vertikalauflösung von 300 m unter Umständen noch nicht richtig wiedergegeben werden kann. Um dies zu untersuchen, wurde eine Simulation mit einer höheren horizontalen und vertikalen Auflösung durchgeführt ($\Delta x = \Delta y = 500 \text{ m}$, $\overline{\Delta z} = 200 \text{ m}$). Alle anderen Parameter entsprechen Simulation 1, d.h. dem maritimen Fall.

Die Abbildungen 5.27 und 5.28 zeigen die Radarreflektivität als MAX-CAPPI bzw. den xz-Schnitt der Hydrometeormassendichten und der Niederschlagsrate. Vergleicht man die Resultate mit Simulation 1 (Abb. 5.6 und 5.7), so zeigt sich eine weitgehende qualitative

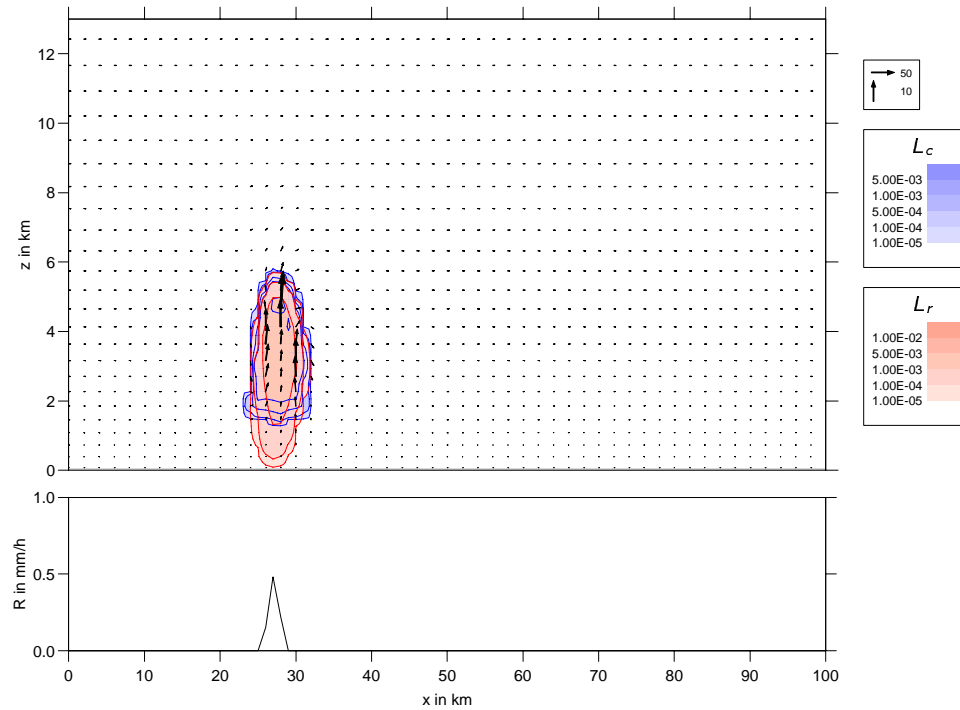


Abbildung 5.21: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 3 nach 18 min (Simulation 3: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, Kessler-Schema).

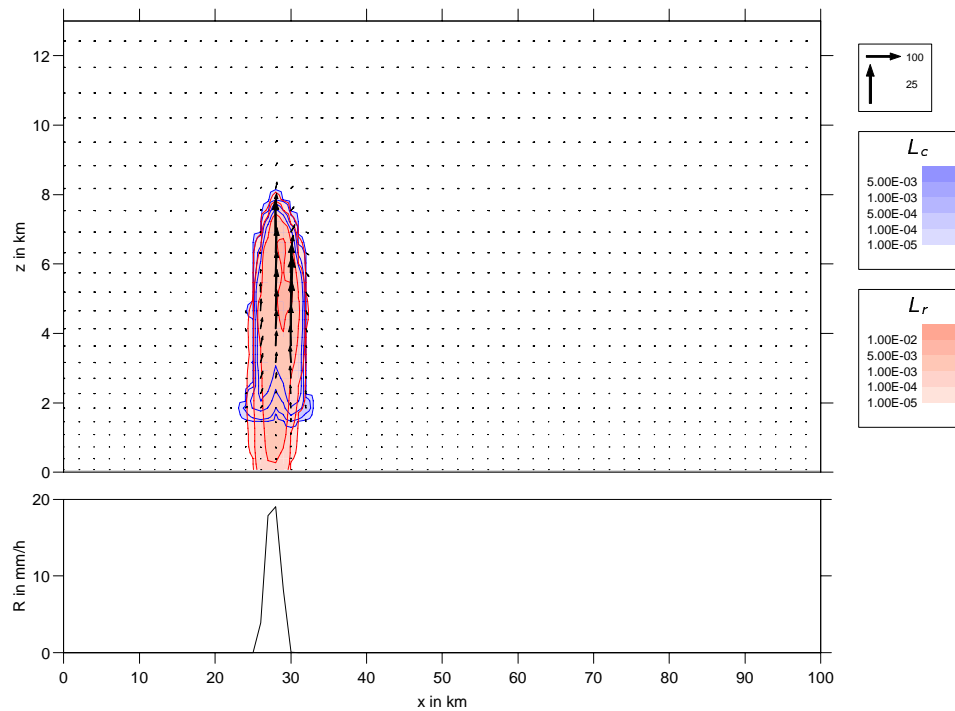


Abbildung 5.22: Wie Abb. 5.21, aber nach 21 min (Simulation 3: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, Kessler-Schema).

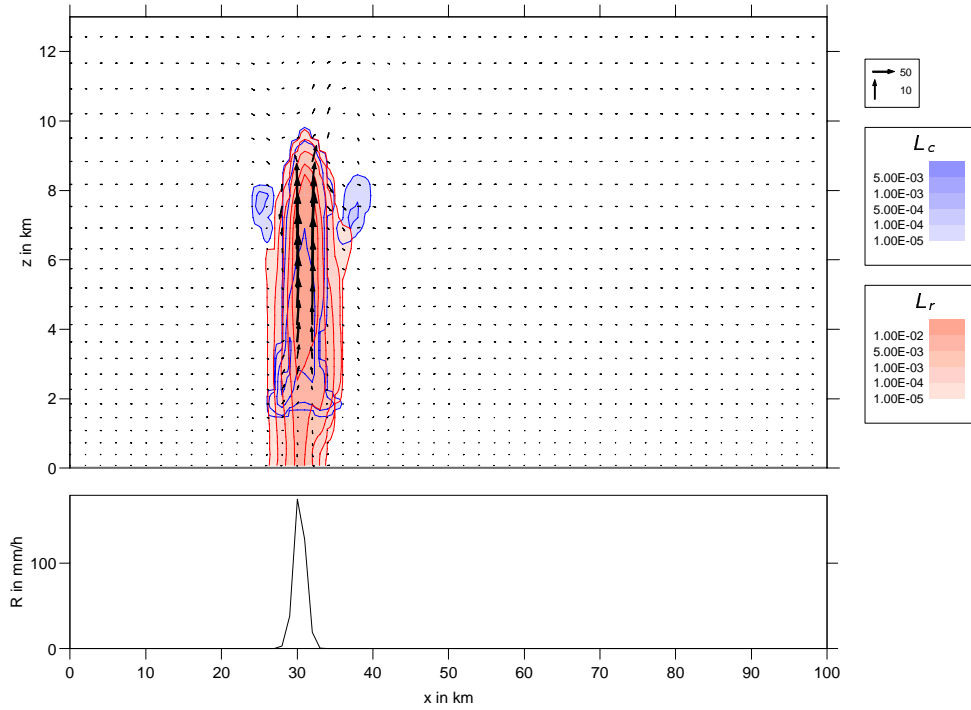


Abbildung 5.23: Wie Abb. 5.21, aber 36 min (Simulation 3: $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$, Kessler-Schema).

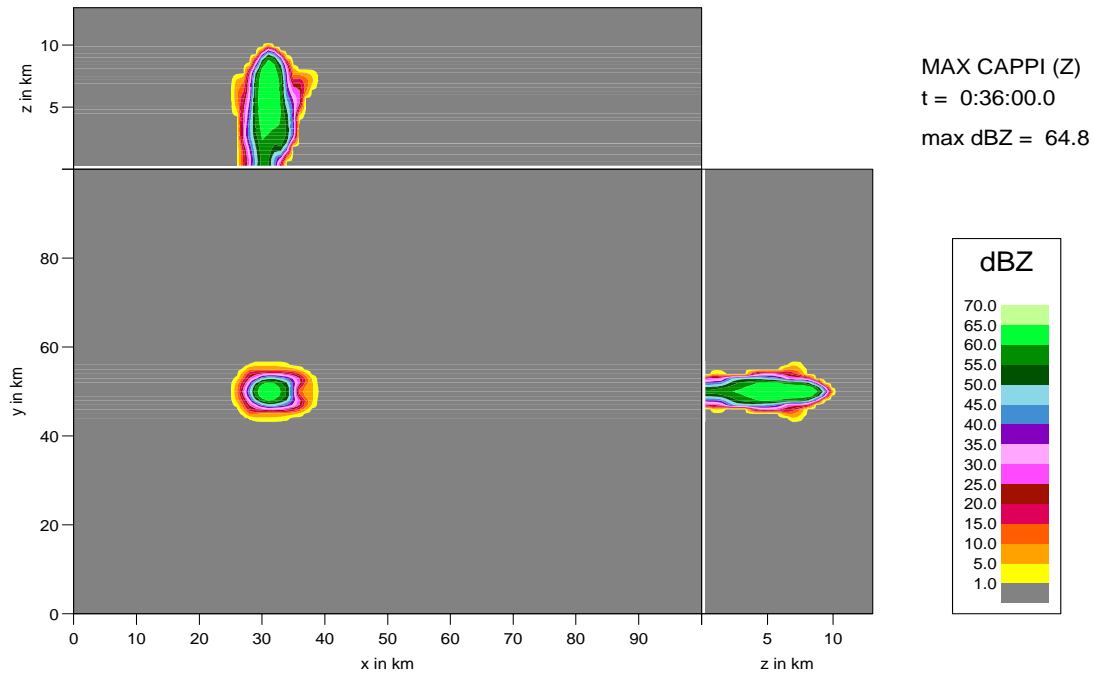


Abbildung 5.24: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 36 min (Simulation 3: $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$, Kessler-Schema).

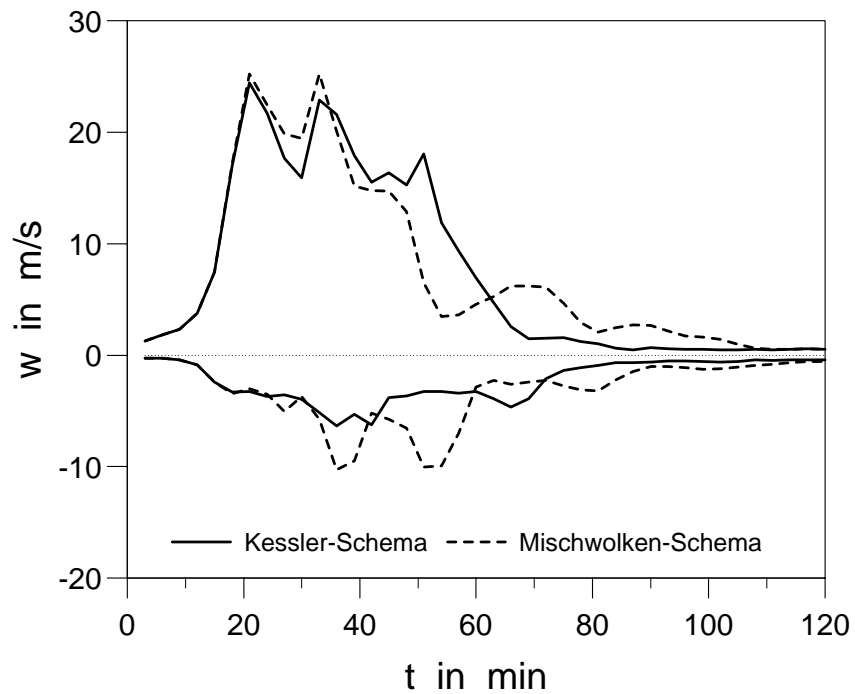


Abbildung 5.25: Zeitreihe der maximalen Aufwindgeschwindigkeiten in m s^{-1} im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 3.

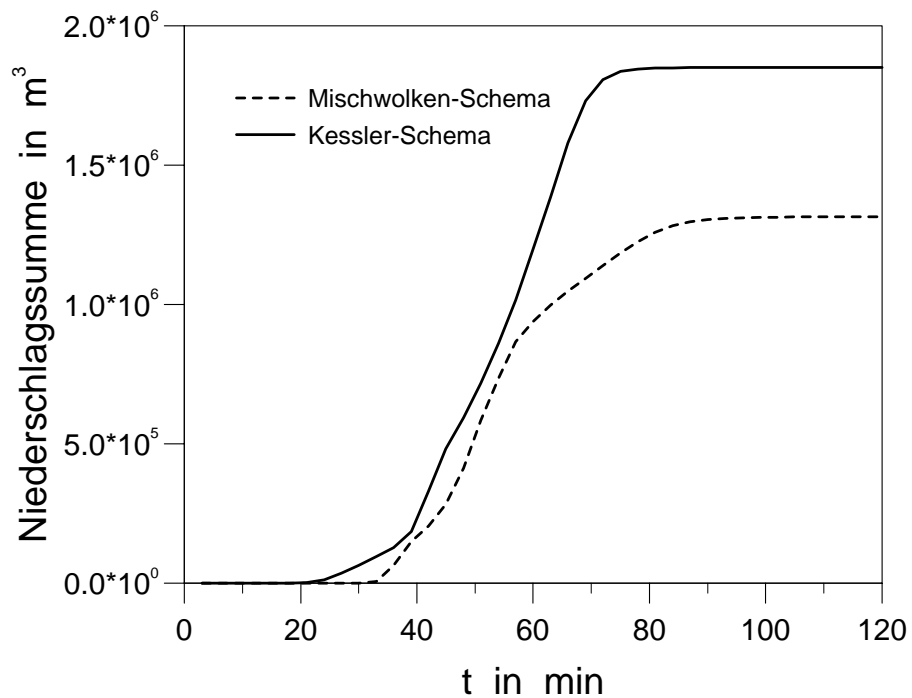


Abbildung 5.26: Zeitreihe der Niederschlagssumme am Boden in m^3 im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 3.

Übereinstimmung. Das Maximum der Reflektivität liegt nur 0.2 dBZ höher. Allerdings ist in 2 km Höhe ein sekundäres Maximum der Reflektivität erkennbar, das in Simulation 1 nicht auftritt. Im in Abb. 5.6 dargestellten xz -Schnitt sind wie zu erwarten größere Gradienten der Massendichten an der Wolkengrenze erkennbar; außerdem ist der Amboss etwas stärker ausgebildet. Größere Unterschiede zeigen sich in der Zeitreihe der maximalen Vertikalwindgeschwindigkeiten (Abb. 5.29): Die höhere räumliche Auflösung führt zu deutlich höheren Aufwindgeschwindigkeiten von über 30 ms^{-1} im Vergleich zu 25 ms^{-1} bei der Referenzsimulation. Mit der horizontalen Gittermaschenweite von 1000 m kann der konvektive Aufwindbereich demnach noch nicht gut genug aufgelöst werden. In der Simulation mit der höheren Auflösung treten außerdem stärkere Abwinde auf. Die Zeitreihe der Niederschlagssumme in Abb. 5.30 zeigt hingegen, dass sich die Unterschiede im Vertikalwindfeld nur schwach auf die Gesamtniederschlagsmenge auswirken. Die höhere räumliche Auflösung führt hier lediglich zu einer leichten Phasenverschiebung, d.h. der Niederschlag setzt etwas später ein.

Obwohl also die Simulation mit höherer räumlicher Auflösung in manchen Variablen deutliche Unterschiede zeigt, kann im Rahmen der Genauigkeit des gesamten Modellsystems die Verwendung der 1 km Auflösung gerechtfertigt werden. So sind z.B. die Unterschiede zwischen dem Kessler-Schema und dem aufwendigeren Mischwolken-Schema oder auch die Unterschiede zwischen maritimen und kontinentalen Bedingungen deutlich größer als die Änderungen durch eine höhere räumliche Auflösung. Bei der Wahl der Auflösung muss auch berücksichtigt werden, dass der numerische Aufwand proportional zu $(\Delta x \Delta y \overline{\Delta z}^2)^{-1}$ ansteigt, d.h. Simulation 4 benötigt fast zehn mal mehr Rechenzeit als Simulation 1. Nach einer Abschätzung von Weisman et al. (1997) genügt zur Simulation großer konvektiver Systeme sogar eine horizontale Auflösung von 2-3 km, um die wesentlichen Prozesse zu erfassen.

5.3.2 Simulation von Superzellen

Hohe Windgeschwindigkeiten in der mittleren und oberen Troposphäre bzw. eine starke Geschwindigkeitsscherung in der unteren Troposphäre begünstigt die Entstehung von Superzellen, d.h. von langlebigen, intensiven Gewittern (siehe Abschnitt 2.4).

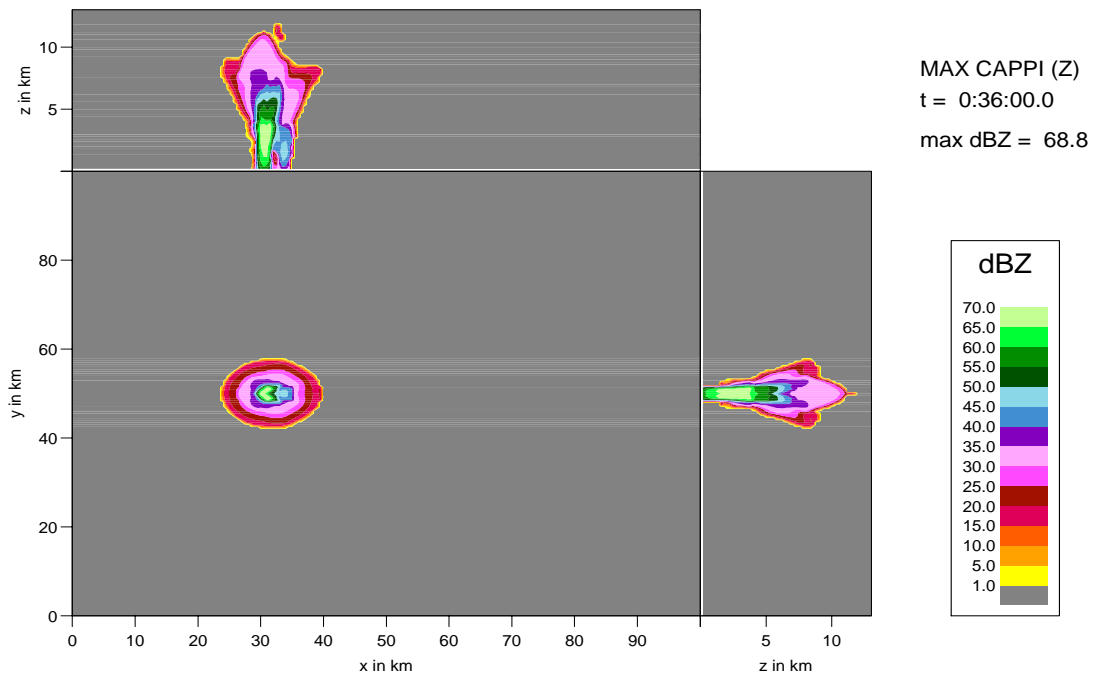


Abbildung 5.27: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 36 min (Simulation 4: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim, hohe Auflösung).

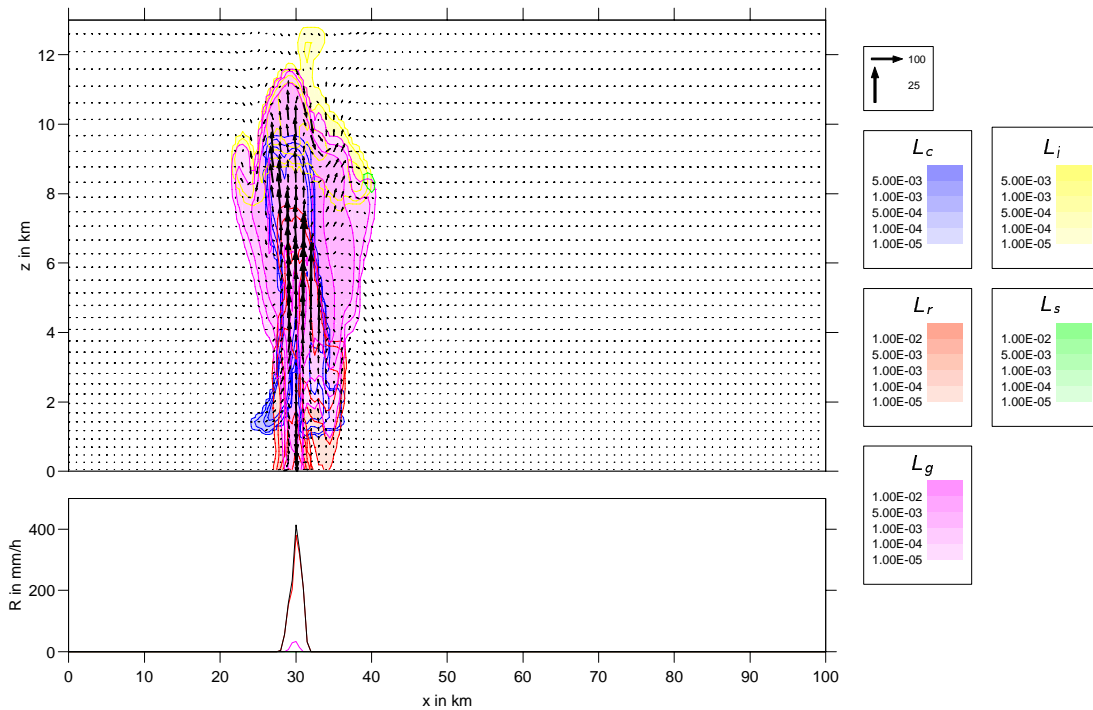


Abbildung 5.28: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 4 nach 36 min (Simulation 4: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, maritim, hohe Auflösung).

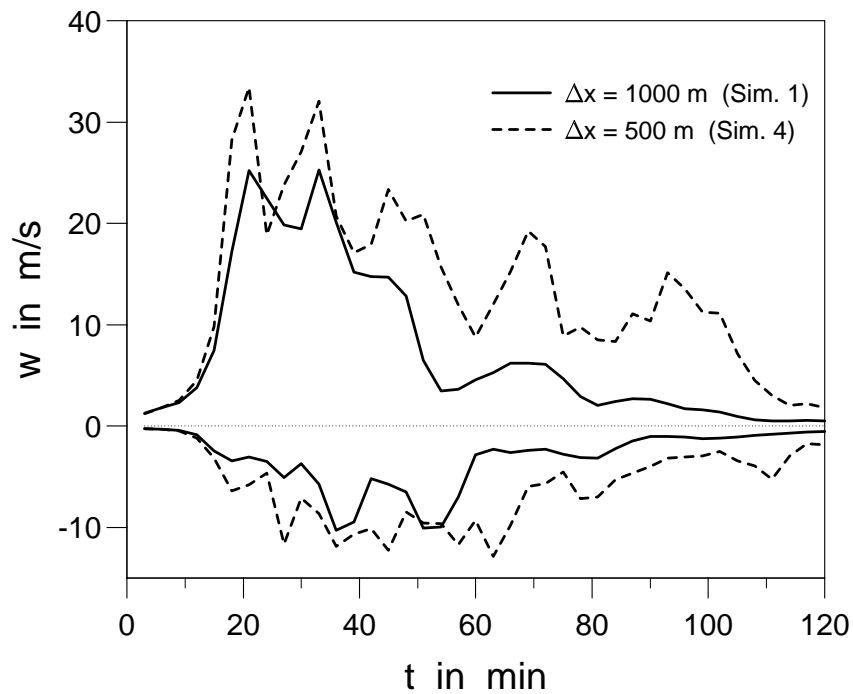


Abbildung 5.29: Zeitreihe der maximalen Aufwindgeschwindigkeiten in m s^{-1} im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 4.

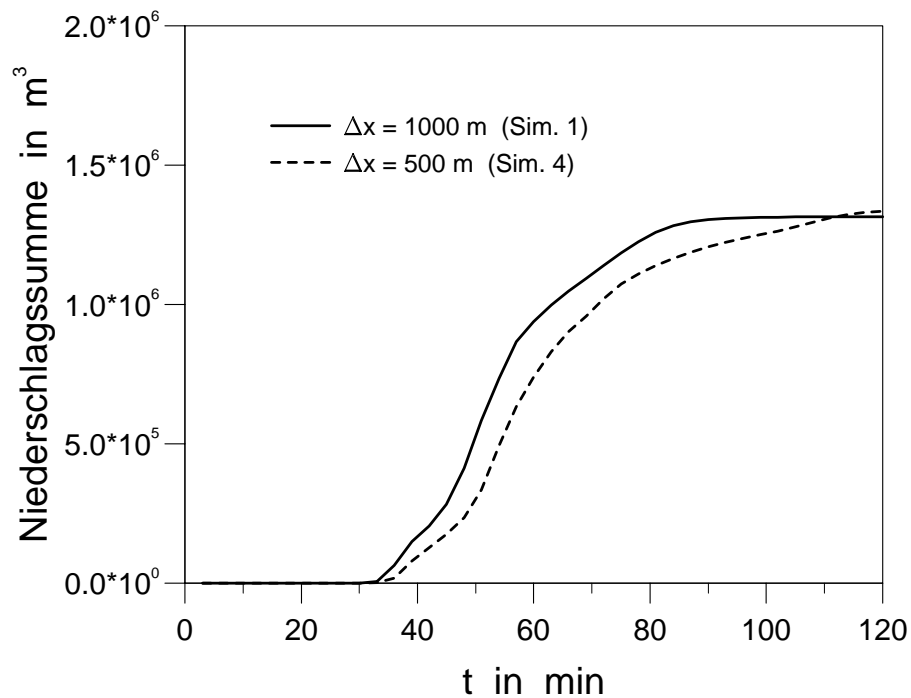


Abbildung 5.30: Zeitreihe der Niederschlagssumme am Boden in m^3 im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1 und 4.

Simulation 5 bzw. 6: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 12 \text{ g kg}^{-1}$, maritim bzw. kontinental

Für die Simulationen 5 und 6 wurde eine maximale Windgeschwindigkeit des Grundstroms von $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$ angenommen. Bei einer CAPE von ca. 1257 J kg^{-1} ergibt dies eine Bulk-Richardson-Zahl von $Ri = 16$. Nach Weisman und Klemp (1982) treten bei dieser Bulk-Richardson-Zahl Superzellen auf.

Die Abbildungen 5.31 bis 5.34 zeigen die zeitliche Entwicklung von Superzellen anhand der Radarreflektivität unter maritimen Bedingungen (Simulation 5): Aus der Primärzelle, die nach 30 min (Abb. 5.31) eine der gewöhnlichen Einzelzelle sehr ähnliche Struktur besitzt, entstehen durch ein so genanntes Zellsplitting zwei Sekundärzellen. Dies deutet sich bereits in Abb. 5.31 an und ist in Abb. 5.32 deutlich zu erkennen. Diese Sekundärzellen besitzen eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Grundstrom und entfernen sich deshalb mit der Zeit voneinander, so dass zwei unabhängige konvektive Systeme entstehen (Abb. 5.33 - 5.35). Bevor der Vorgang des Zellsplittings anhand der Vorticitydynamik etwas näher erläutert wird, soll hier zuerst die Phänomenologie der Superzellen unter maritimen und kontinentalen Bedingungen diskutiert werden.

Einen xz -Schnitt der Hydrometeormassendichten durch eine entwickelte Superzelle zeigt Abbildung 5.36. Neben dem konvektiven Aufwindgebiet ist sowohl das vorder- als auch rückseitige Absinken zu erkennen (vgl. Abschnitt 2.4, Abb. 2.12). Ein hervorstechendes Merkmal ist auch der sich über ca. 30 km Länge erstreckende Amboss in 7 km Höhe, der hauptsächlich aus Wolkentropfen besteht. Bei Temperaturen um $-30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ würde man auf Grund der meisten Beobachtungen erwarten, dass Wolkeneis hier die dominante Phase ist. Andererseits finden Rosenfeld und Woodley (2000) auch bei Temperaturen kleiner $-30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ hohe Wolkenwassergehalte.

Auch unter Annahme des kontinentalen Aktivierungsspektrums (Simulation 6) entwickeln sich unter diesen atmosphärischen Bedingungen Superzellen: Die Abbildung 5.37 zeigt die Radarreflektivität für Simulation 6 nach 120 min. Die maximale Reflektivität ist dabei mit 67 dBZ sogar um 4 dBZ höher als im maritimen Fall. Unterschiede sind auch im xz -Schnitt der Hydrometeordichten zu erkennen (Abb. 5.38). Insbesondere treten auf Grund der geringen Effizienz der Koagulationsprozesse unter kontinentalen Bedingungen höhere Wolkenwassergehalte auf. Dadurch steht im Prinzip mehr Wasser für die Eisprozesse zur Verfügung. Das Wolkenwasser kann aber, da auch das Bereifen sehr ineffizient ist, zum großen Teil nur über den Bergeron-Findeisen-Prozess, d.h. über das Depositionswachstum der Eispartikel auf Kosten verdunstender Wolkentropfen abgebaut werden. Auf Grund der

niedrigeren Autokonversionsrate stehen im kontinentalen Fall auch weniger gefrorene Tropfen als Graupelembryos zur Verfügung und auch die heterogene Eisknucleation stellt nur eine relativ geringe Anzahl an Eiskristallen bereit. Dies hat zur Folge, dass sich größere Graupelpartikel bilden als im maritimen Fall (Abb. 5.39 und 5.40). In den Abbildung 5.41 und 5.42 sind die Zeitreihen der Maximalwerte der Hydrometeormassendichten dargestellt. Die wesentlichen Unterschiede sind auch hier zu erkennen: Im kontinentalen Fall bilden sich erst später, bei höheren Wolkenwassergehalten Niederschlagspartikel. Die Massendichten der Niederschlagspartikel erreichen im maritimen Fall im Mittel höhere Werte als im kontinentalen Fall. Die Abbildungen 5.43 und 5.44 zeigen die räumliche Verteilung der Niederschlagssumme im Simulationsgebiet. In beiden Abbildungen sind die Zugbahnen der Superzellen deutlich zu erkennen. Aus diesen Zugbahnen kann leicht die Eigengeschwindigkeit der Superzellen abgelesen werden: Näherungsweise ergibt sich in beiden Fällen in Strömungsrichtung eine konstante Geschwindigkeit von ca. 55 km h^{-1} oder 15 m s^{-1} , d.h. die Superzellen bewegen sich deutlich langsamer als es der Geschwindigkeit des Grundstroms entspricht. Die Transversalgeschwindigkeit beträgt in beiden Fällen ca. 10 km h^{-1} . Auffällig ist, dass die Spur der maritimen Zellen breiter ist, während im kontinentalen Fall lokal höhere Werte erreicht werden. Dies stimmt mit der Vorstellung überein, dass im maritimen Fall mehr, aber kleinere Niederschlagspartikel gebildet werden, im kontinentalen Fall weniger, jedoch größere. Die Gesamtsumme des Niederschlags unterscheidet sich in diesem Fall um 20 %, wobei, wie zu erwarten, unter maritimen Bedingungen mit $8.79 \times 10^6 \text{ m}^3$ mehr Niederschlag den Boden erreicht als im kontinentalen Fall mit $7.11 \times 10^6 \text{ m}^3$.

In Abbildung 5.45 ist der zeitliche Verlauf der maximalen Auf- und Abwindgeschwindigkeiten für die Simulationen 1, 2, 5 und 6 dargestellt. Während für die Simulationen 1 und 2, die durch eine niedrige Windgeschwindigkeit des Grundstroms von 5 m s^{-1} charakterisiert sind, die Aufwindgeschwindigkeit nach 50 bzw. 60 min rasch auf Werte unter 5 m s^{-1} abfällt und somit das Verhalten einer gewöhnlichen Einzelzelle zeigt, bleibt die maximale Aufwindgeschwindigkeit für die Simulationen mit starker Windscherung auf hohem Niveau. Die maximale Aufwindgeschwindigkeit unterliegt für diese Simulationen allerdings starken stochastischen Fluktuationen. Hingegen treten bei den Simulationen 1 und 2, also bei den gewöhnlichen Einzelzellen die höheren Abwindgeschwindigkeiten auf. Für die Superzellen der Simulationen 5 und 6 ergeben sich Abwinde von ca. 5 m s^{-1} .

Der Unterschied zwischen Einzel- und Superzellen zeigt sich natürlich auch im zeitlichen Verlauf der Niederschlagssumme, wie er in Abbildung 5.46 für die Simulationen 1, 2, 5 und 6 dargestellt ist. Während die Einzelzellen nur über ca. 30-40 min intensiven Niederschlag pro-

duzieren, zeigen die quasi-stationären Superzellen einen linearen Anstieg der Niederschlags-summe, also eine zeitlich konstante integrale Niederschlagsrate. Sowohl im Fall der Einzel- als auch der Superzellen setzt unter kontinentalen Bedingungen der Niederschlag später ein; während im Fall der Einzelzellen die Niederschlagsmenge nach 3 h keinen signifikanten Un- terschied aufweist, ergibt sich im Fall der Superzellen, wie bereits erwähnt, im maritimen Fall 20 % mehr Niederschlag. Wie die Steigung der Kurven in Abb. 5.46 zeigt, ist auch die Niederschlagsrate im maritimen Fall stets höher, so dass sich dieser Unterschied mit der Zeit noch vergrößert. Die Abhängigkeit der Niederschlagsmenge von den atmosphärischen Bedingungen, d.h. von u_∞ und q_{max} wird in Abschnitt 5.3.4 noch im Detail diskutiert.

Vorticitydynamik des Zellsplittings am Beispiel von Simulation 5

Die dynamischen Ursachen des für die Entstehung von Superzellen charakteristischen Zell- splittings können anhand des Zusammenhangs zwischen der Vertikalbewegung w und der relativen Vorticity ζ erläutert werden. Aus dem Drehterm der Vorticitygleichung gewinnt man durch Linearisierung um den Grundstrom die Beziehung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5.20)$$

d.h. in einem Grundstrom mit Geschwindigkeitsscherung bildet sich an den seitlichen Flanken des Aufwindschlauches horizontale Vorticity aus. Dabei entsteht an der rechten Flanke posi- tive Vorticity, an der linken Flanke negative Vorticity (vgl. Abb. 2.10). Abbildung 5.47 zeigt für Simulation 5 einen Horizontalschnitt der relativen Vorticity ζ und der Vertikalgeschwin- digkeit w in 4500 m Höhe, in der der Aufwindbereich und der entstandene Vorticitydipol deutlich zu erkennen sind. Man erkennt auch leichte Abwinde, die den Aufwindschlauch umgeben.

In einer derart rotierenden Strömung bilden sich in den Vorticityextrema dynamische Druck- störungen aus, die proportional zum Quadrat der relativen Vorticity sind:

$$\Delta p_{dyn} \sim -\zeta^2 \quad (5.21)$$

(siehe z.B. Klemp, 1987). Dadurch entsteht sowohl im Bereich der minimalen als auch der maximalen Vorticity ein vertikaler Druckgradient, der den Aufwind verstärkt. Auf Grund die- ser Kopplung zwischen dem Vertikalwind und der Vorticity bildet sich eine bimodale Struktur im Vertikalwindfeld aus, die in Abbildung 5.48, welche die Vorticity und den Vertikalwind nach 36 min zeigt, zu erkennen ist. Zu diesem Zeitpunkt bildet sich auch Niederschlag und durch

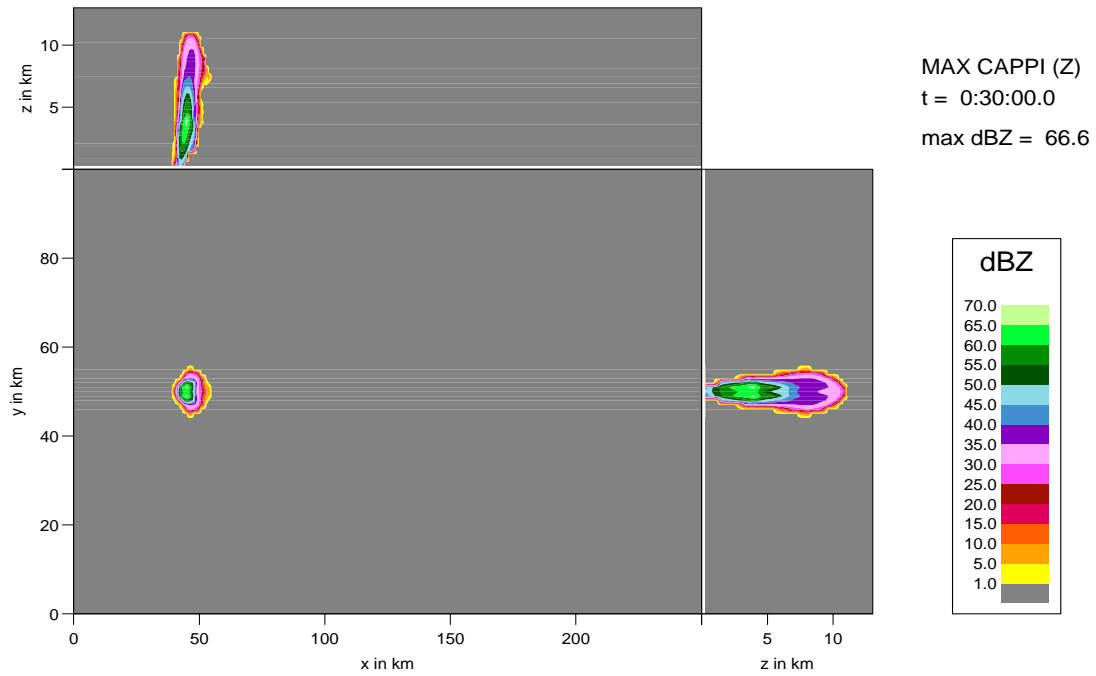


Abbildung 5.31: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 30 min (Simulation 5: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

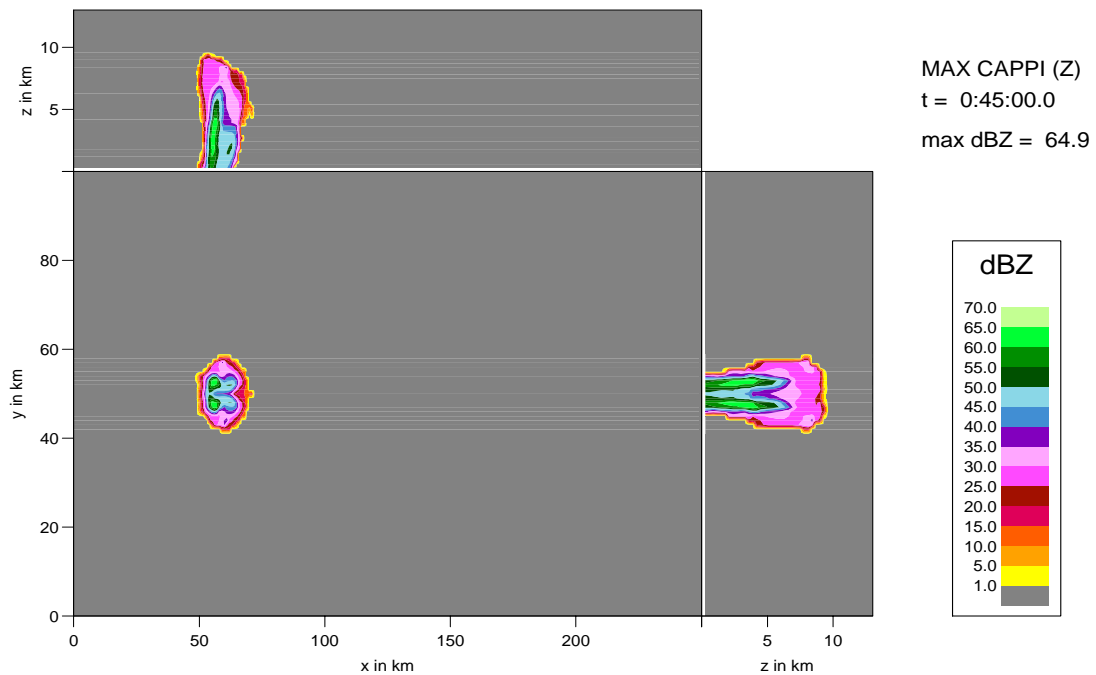


Abbildung 5.32: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 45 min (Simulation 5: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

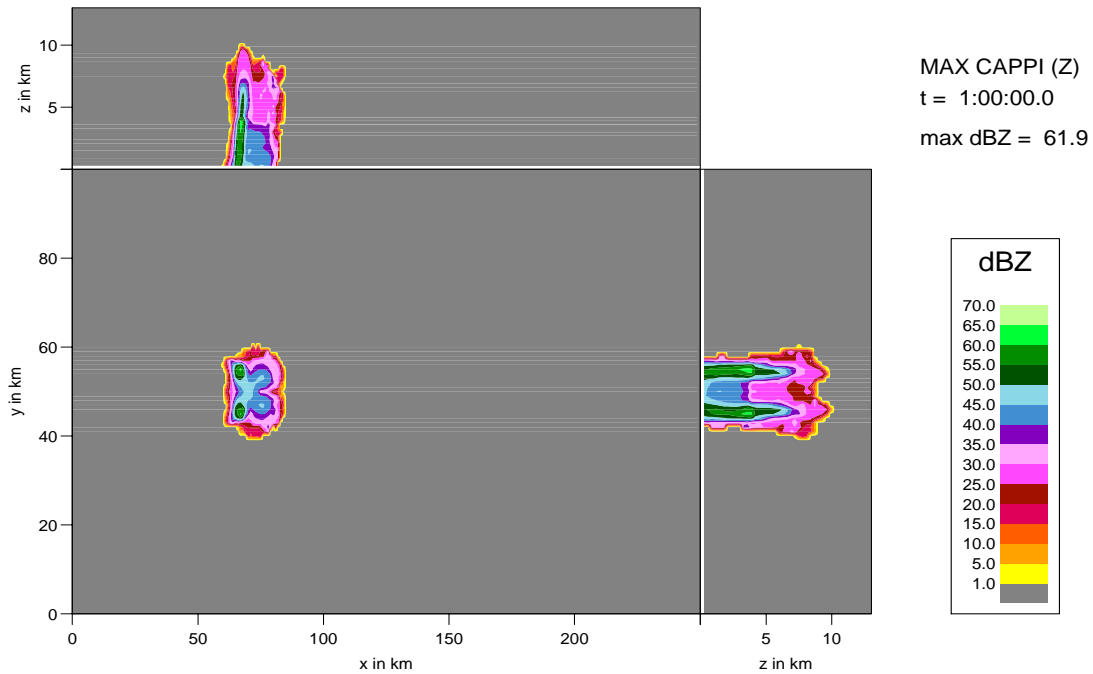


Abbildung 5.33: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 60 min (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ ms}^{-1}$, maritim).

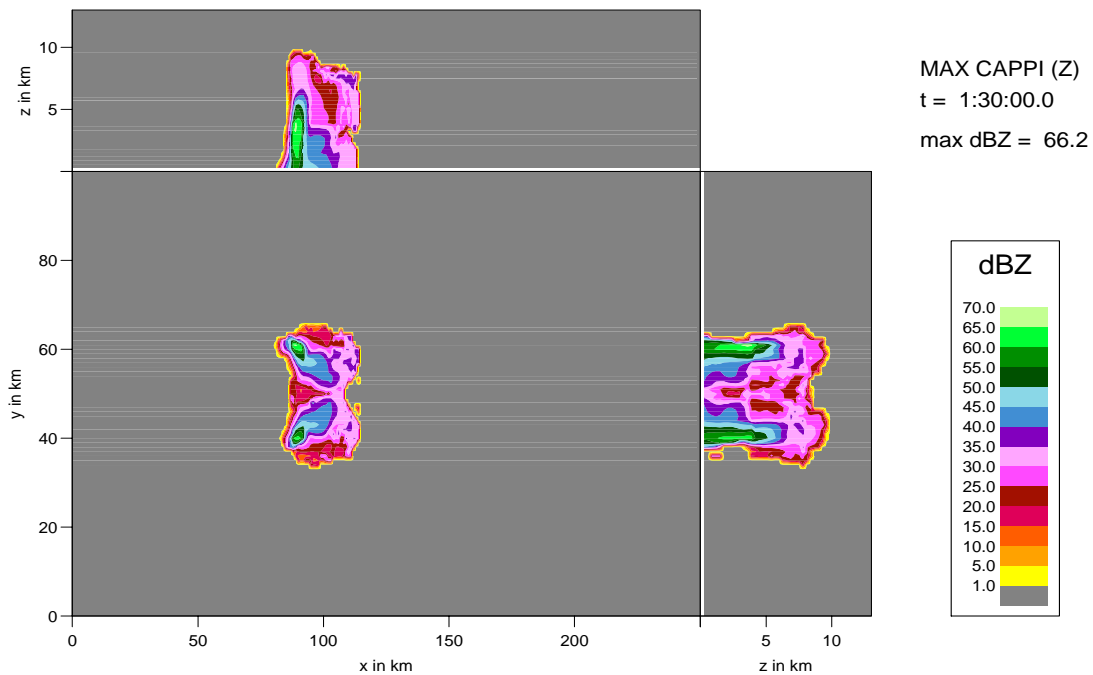


Abbildung 5.34: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 90 min (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ ms}^{-1}$, maritim).

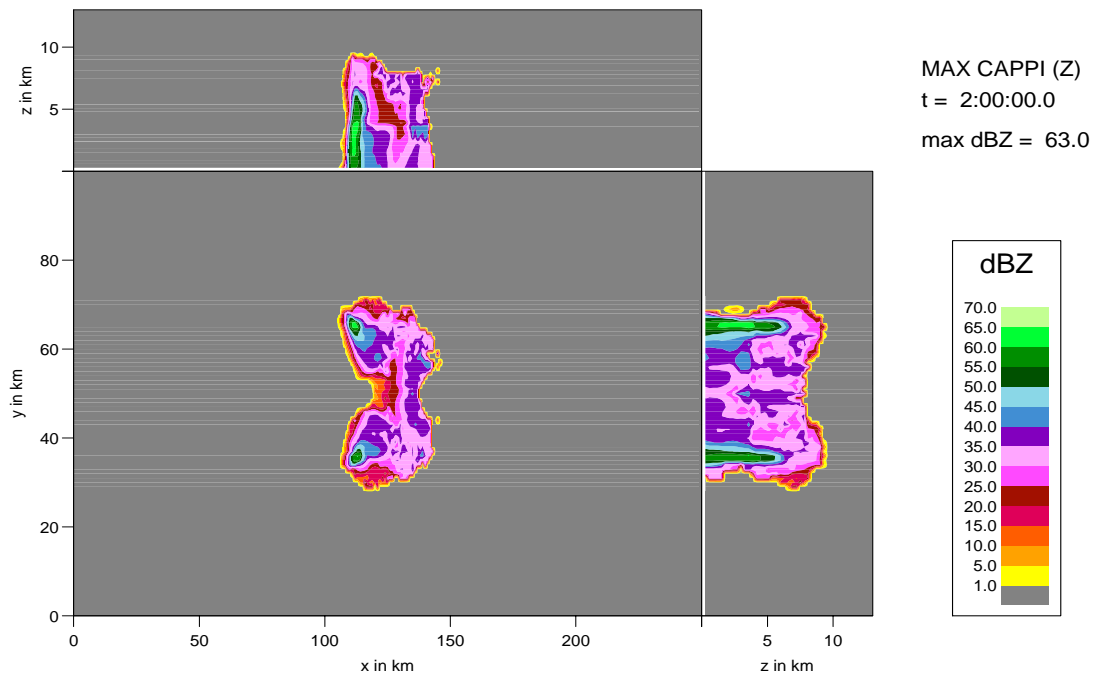


Abbildung 5.35: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 120 min (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

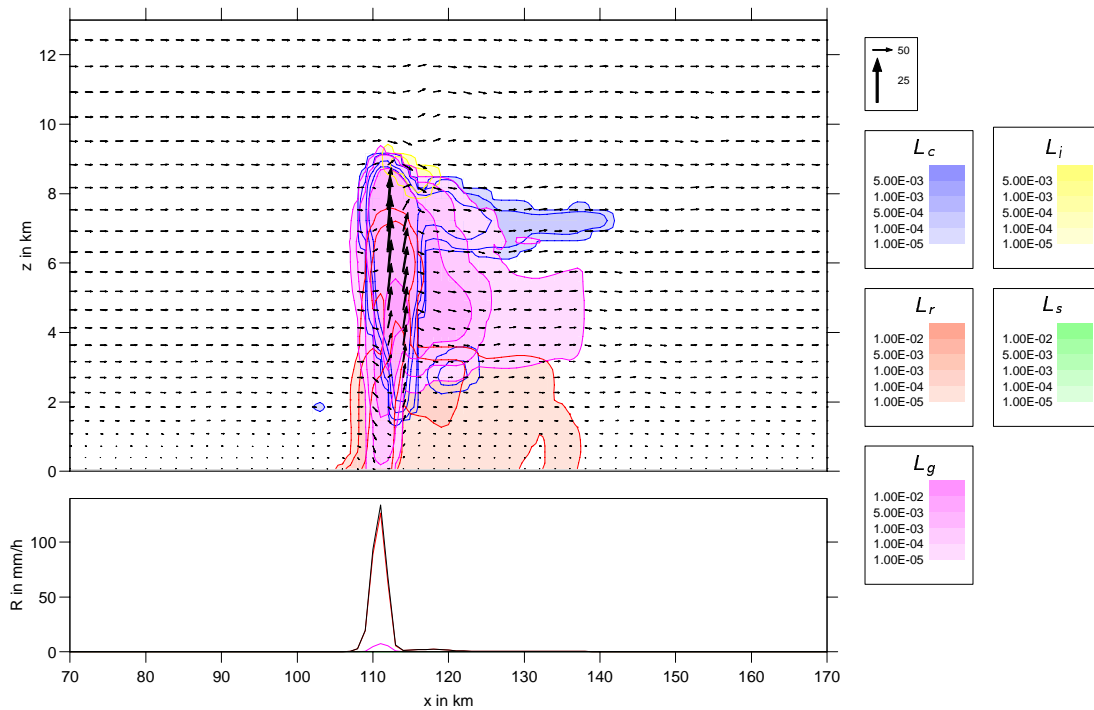


Abbildung 5.36: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 5 bei $y = 65 \text{ km}$ nach 120 min (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

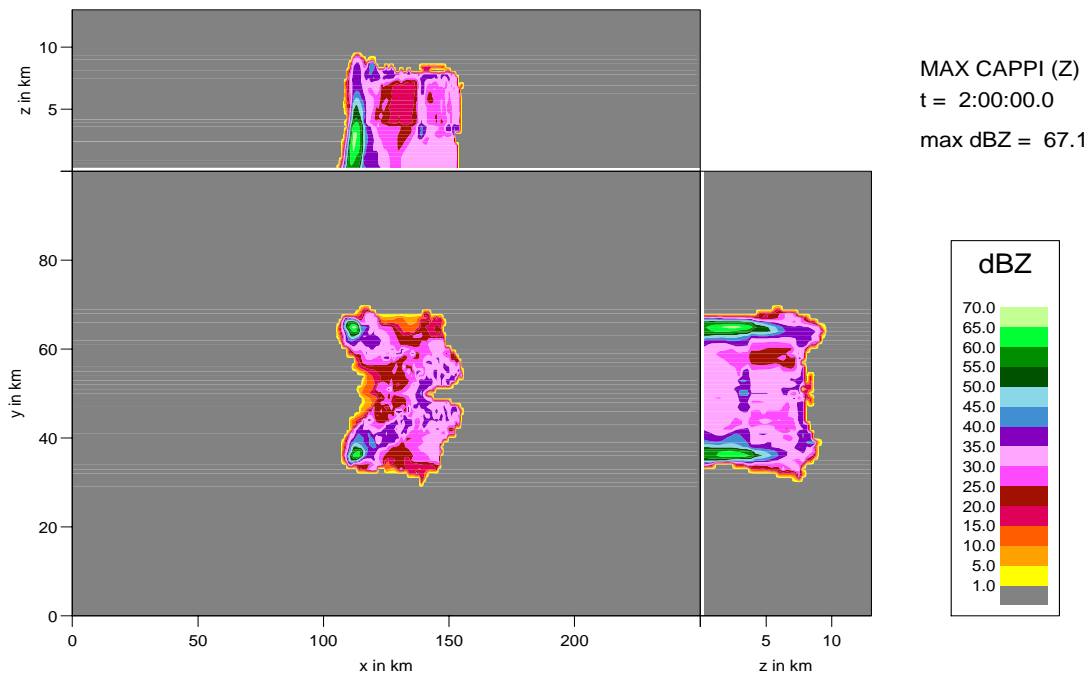


Abbildung 5.37: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 120 min (Simulation 6: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

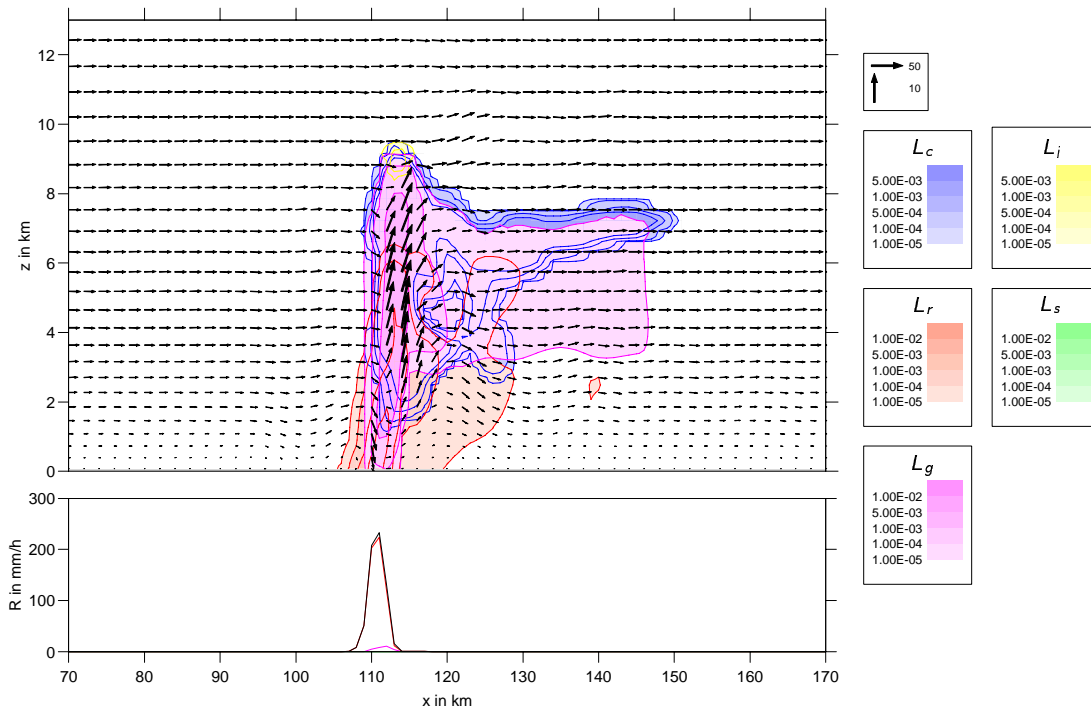


Abbildung 5.38: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 6 bei $y = 65 \text{ km}$ nach 120 min (Simulation 6: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

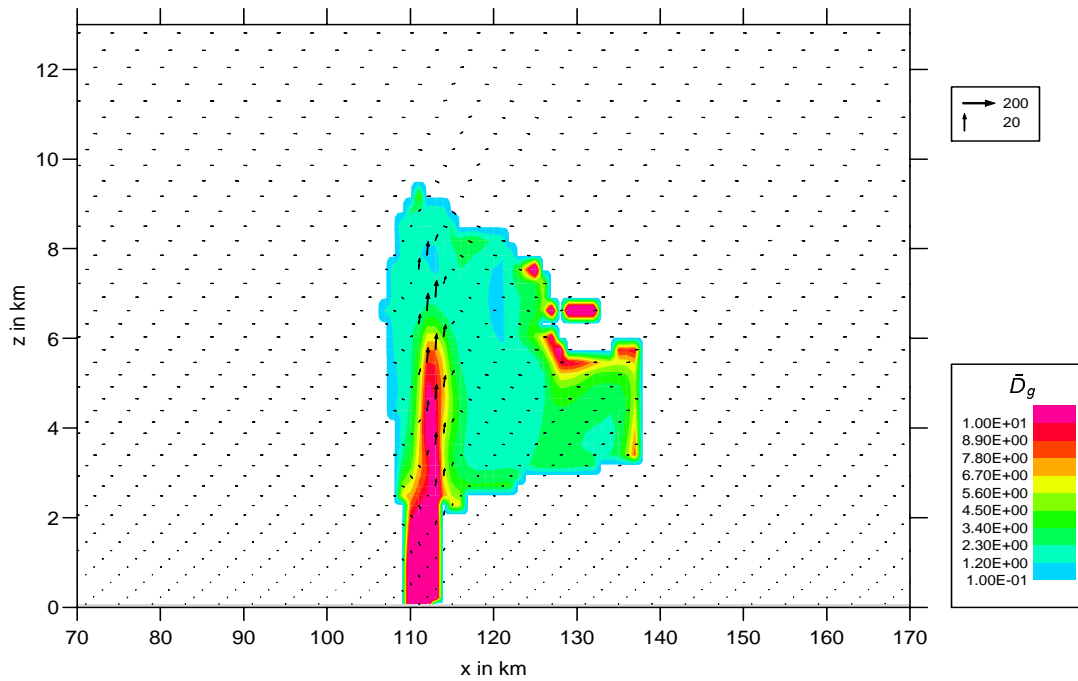


Abbildung 5.39: Mittlerer Durchmesser der Graupelpartikel in mm im xz -Schnitt bei $y = 65$ km nach 120 min (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

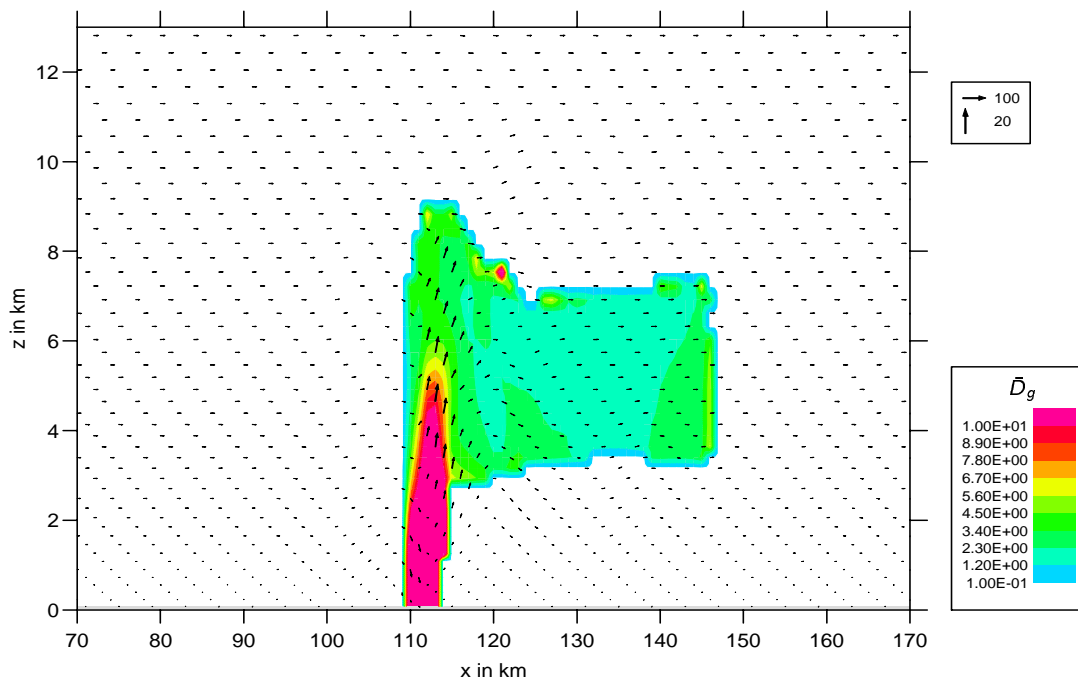


Abbildung 5.40: Mittlerer Durchmesser der Graupelpartikel in mm im xz -Schnitt bei $y = 65$ km nach 120 min (Simulation 6: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

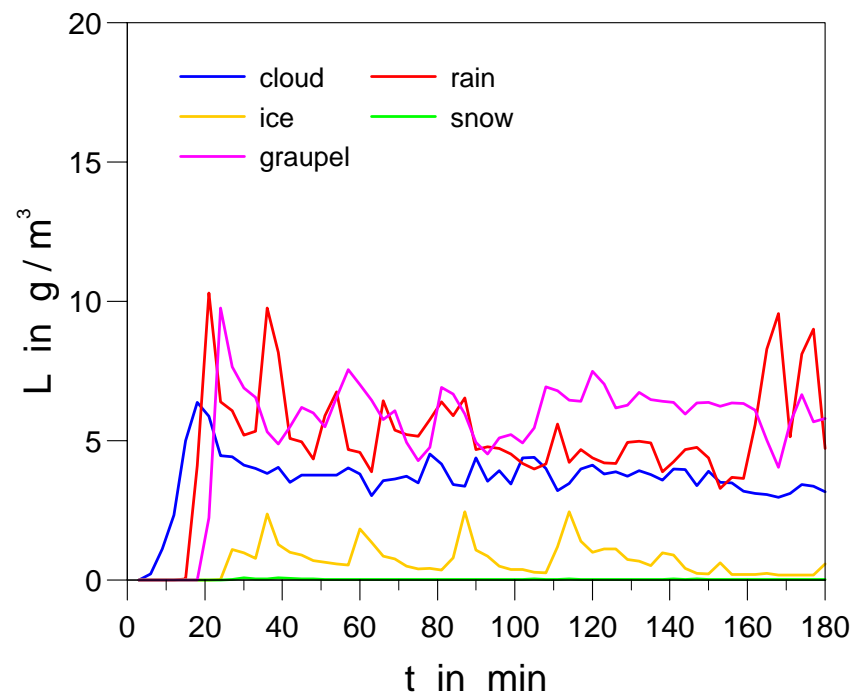


Abbildung 5.41: Zeitreihe der Maximalwerte der Massendichten der Hydrometeore in g m^{-3} im gesamten Simulationsgebiet (Simulation 5: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

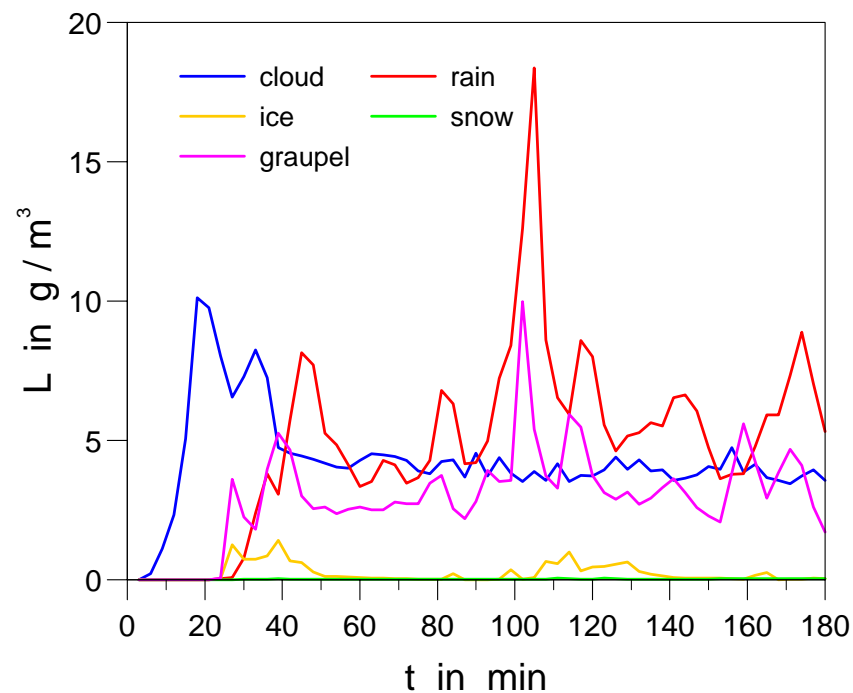


Abbildung 5.42: Zeitreihe der Maximalwerte der Massendichten der Hydrometeore in g m^{-3} im gesamten Simulationsgebiet (Simulation 6: $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

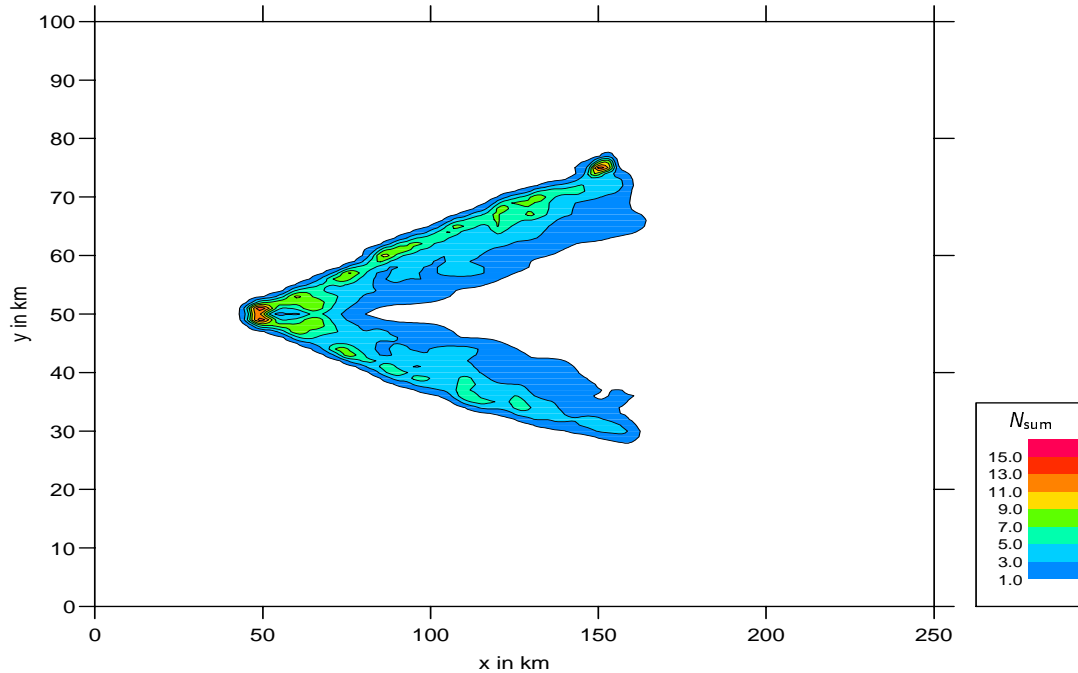


Abbildung 5.43: Niederschlagssumme am Boden in mm nach 180 min (Simulation 5: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, maritim).

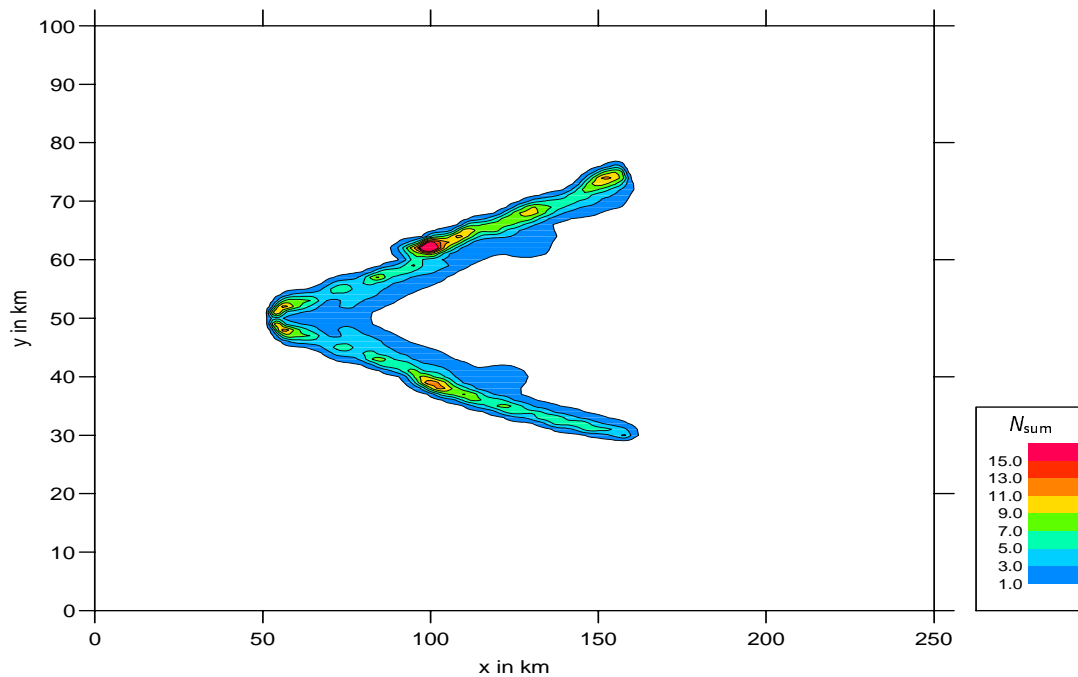


Abbildung 5.44: Niederschlagssumme am Boden in mm nach 180 min (Simulation 6: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, kontinental).

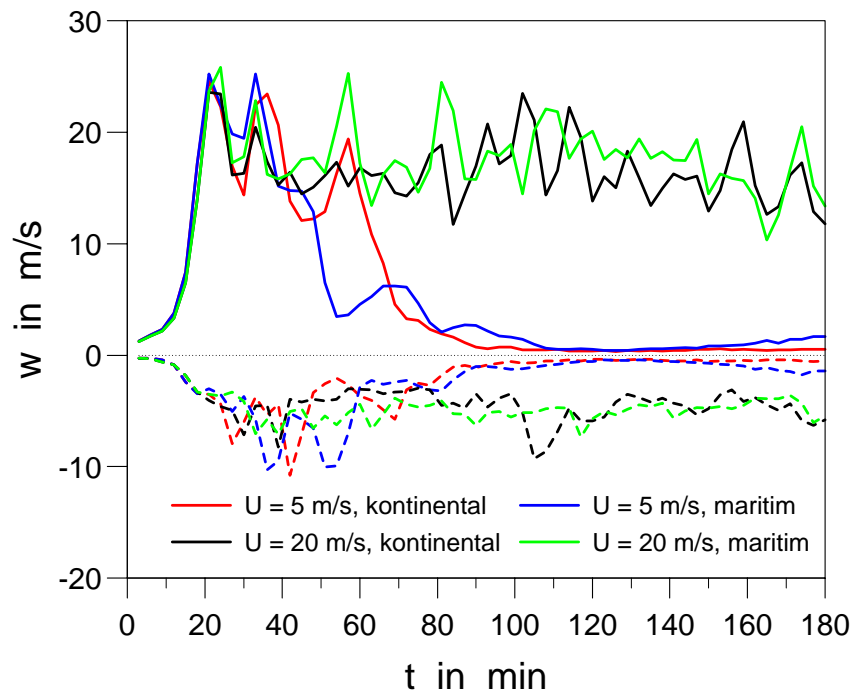


Abbildung 5.45: Zeitreihe der maximalen Auf- und Abwindgeschwindigkeiten in $m s^{-1}$ im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1, 2, 5 und 6.

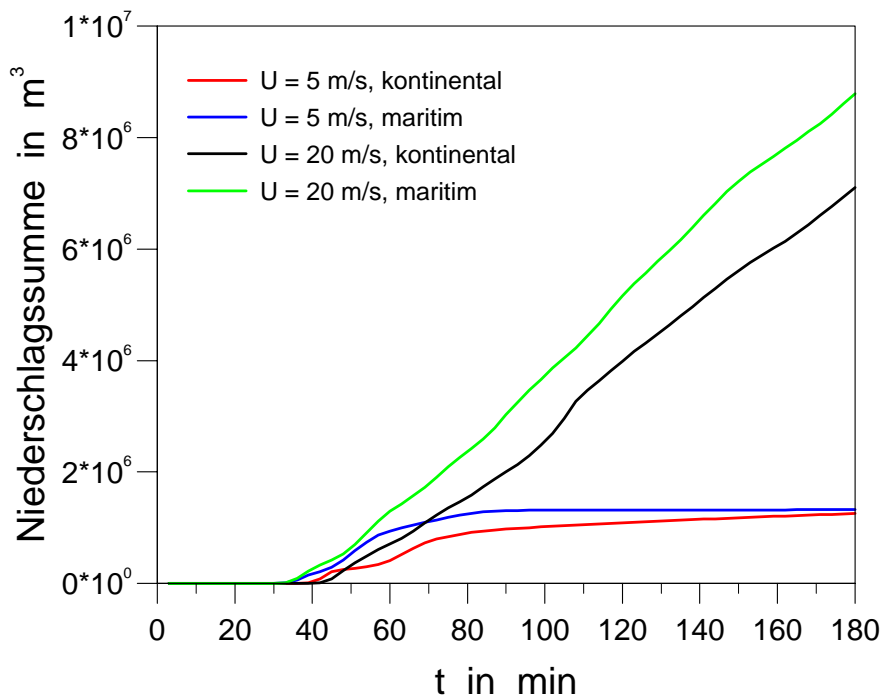


Abbildung 5.46: Zeitreihe der Niederschlagssumme am Boden in m^3 im gesamten Simulationsgebiet für die Simulationen 1, 2, 5 und 6.

die Masse der Hydrometeore wird die Strömung im Zentrum des Vorticitydipols abgebremst ('liquid/ice water drag') - dies verstärkt die bimodale Struktur im Vertikalwindfeld.

Da die Produktion der Vorticity an den horizontalen Gradienten der Vertikalgeschwindigkeit gekoppelt ist, führt die Teilung des Aufwindschlauchs dazu, dass im Zentrum des Vorticitydipols nun die Vorticity abgebaut wird. Dadurch, dass an den äußeren Flanken weiterhin die jeweils entsprechende Vorticityneubildung erfolgt, während im Zentrum Vorticity abgebaut wird, entsteht eine Transversalbewegung der Vorticityextrema. Diese bewirkt das beobachtbare Zellsplitting. Nach 48 min (Abb. 5.49) haben sich die Vorticityextrema bereits deutlich voneinander entfernt und es sind zwei getrennte Aufwindbereiche und damit zwei Sekundärzellen entstanden. Zwischen den beiden Aufwindgebieten ist sogar ein leichter Abwind erkennbar. Weitere 12 min später (Abb. 5.50) haben die Sekundärzellen ebenfalls den typischen Vorticitydipol ausgebildet. Dabei dominiert in der sich nach links bewegenden Zelle die negative Vorticity und in der sich nach rechts bewegenden Zelle die positive. Das Zellsplitting ist damit vollzogen und die Sekundärzellen erweisen sich nun, im Gegensatz zur Primärzelle, als stabile, quasi-stationäre Superzellen.

Der dominante Prozess bei einem derartigen Zellsplitting ist die erwähnte dynamische Kopplung des Vertikalwinds und der relativen Vorticity. Der Einfluss der Niederschlagsbildung ist hierbei nur von untergeordneter Bedeutung. Um dies zu untersuchen, wurde eine Simulation ohne Niederschlagsprozesse, d.h. nur unter Berücksichtigung der Kondensation, durchgeführt, die ebenfalls ein Zellsplitting zeigte.

In der Atmosphäre kommt zur reinen Geschwindigkeitsscherung meist noch eine Richtungsscherung hinzu. Dies führt dazu, dass entsprechend der Krümmung des Hodographen die positive oder negative Vorticity dominiert und entsprechend die rechte oder linke Sekundärzelle stärker rotiert und damit langlebiger ist (Weisman und Klemp, 1984).

Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim

Um einen Einblick in die Variabilität der Superzellen zu geben, soll hier noch eine Modellrechnung mit einem höheren bodennahen Wasserdampfverhältnis von $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$ gezeigt werden. Damit ergibt sich eine CAPE von 2280 J kg^{-1} , was für Mitteleuropa sicherlich ein untypisch hoher Wert ist; in den USA und hier insbesondere in der so genannten 'Tornado Alley' sind derartige Situationen auf Grund der aus dem Golf von Mexiko stammenden sehr warmen und feuchten Luft jedoch keine Seltenheit (Emanuel, 1994; Bluestein, 1999).

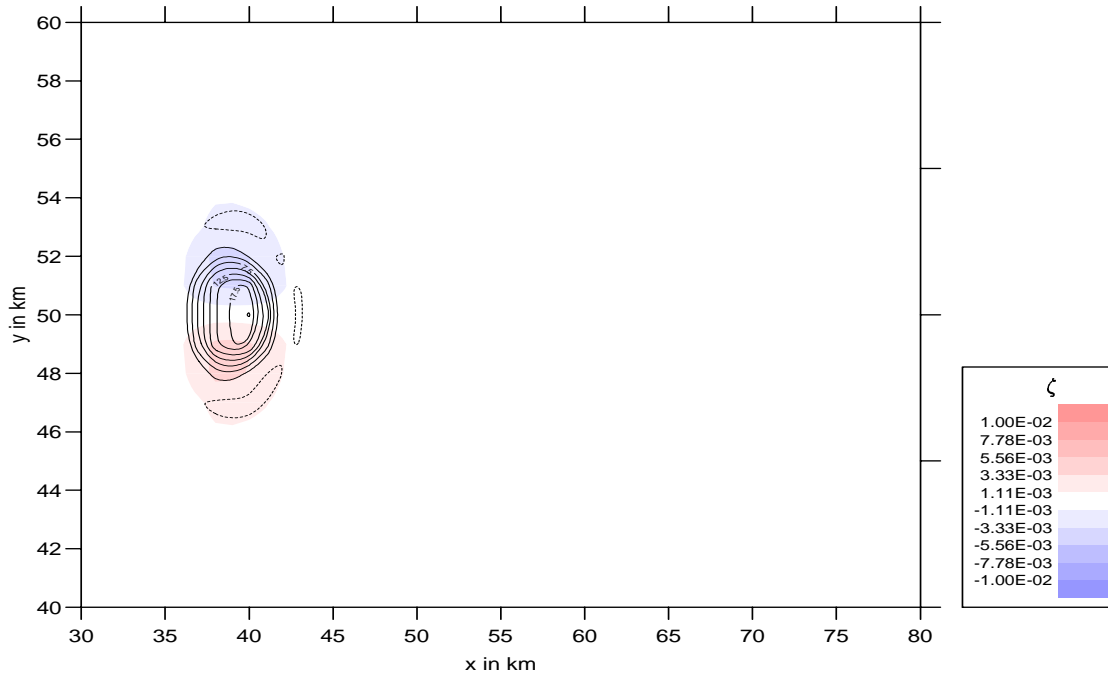


Abbildung 5.47: Horizontalschnitt ($z = 4500$ m) der Vorticity in s^{-1} (rot-blau-skaliert) und der Auf- (—) und Abwindgeschwindigkeit (- - -) in $m s^{-1}$ (Abstand der Isolinien: $2.5 m s^{-1}$) nach 21 min (Simulation 5: $u_{\infty} = 20 m s^{-1}$, maritim).

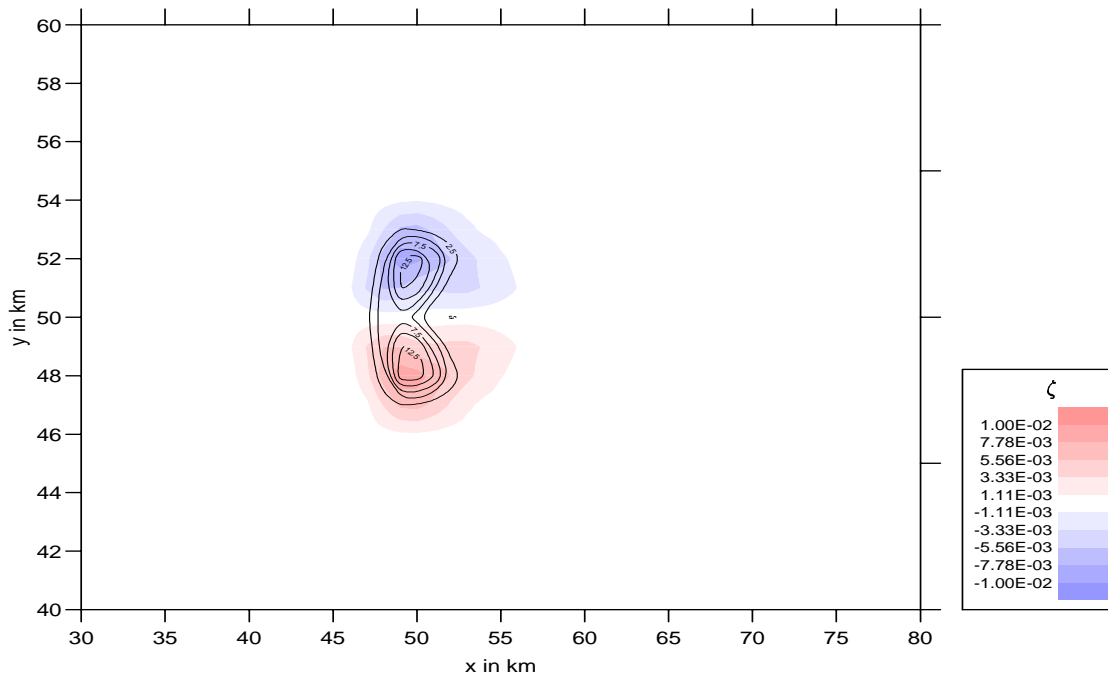


Abbildung 5.48: Wie Abb. 5.47, aber nach 36 min.

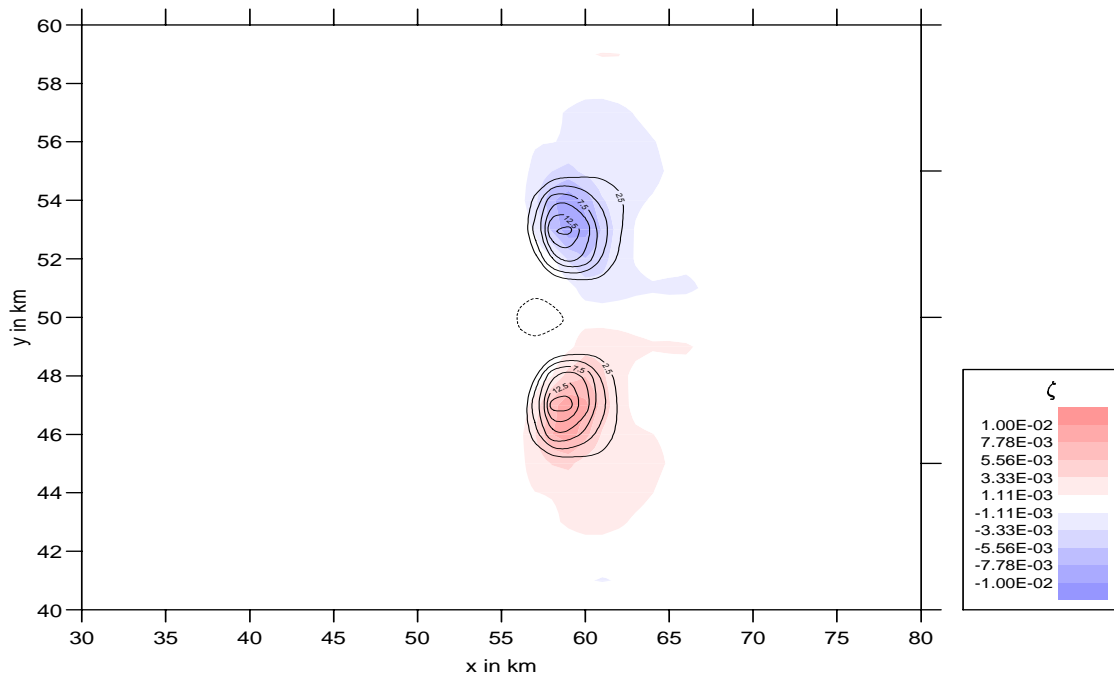


Abbildung 5.49: Wie Abb. 5.47, aber nach 48 min.

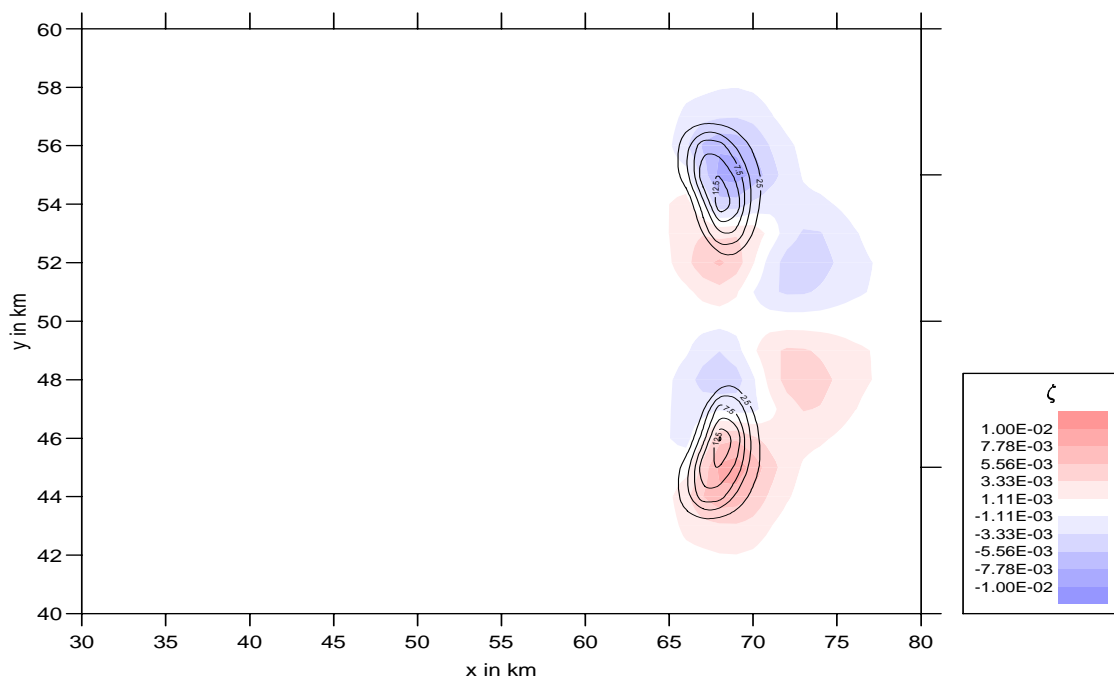


Abbildung 5.50: Wie Abb. 5.47, aber nach 60 min.

In Abbildung 5.51 ist die Radarreflektivität nach 3 h Simulationszeit als MAX-CAPPI dargestellt. Deutlich sind zwei Superzellen zu erkennen, wobei besonders die sich nach rechts bewegende Zelle eine sehr klare Struktur ausgebildet hat. Wie zu erwarten, sind die Reflektivitäten höher als im Fall mit $q_{max} = 12 \text{ g kg}^{-1}$, das Maximum der Reflektivität erreicht 71.3 dBZ. Abbildung 5.52 zeigt einen xz -Schnitt durch die rechte Superzelle bei $y = 20 \text{ km}$. Im Gegensatz zu Simulation 5 hat sich hier ein Amboss ausgebildet, der sich horizontal über 60 km Länge erstreckt und vollständig vereist ist. Da der Amboss in diesem Fall aus sehr kleinen Wolkeneispartikeln (hexagonalen Plättchen) besteht, ist er in der MAX-CAPPI-Darstellung der Reflektivität nicht erkennbar. Die Vereisung wird hier dadurch begünstigt, dass sich auf Grund der höheren CAPE und der damit verbundenen höheren Vertikalwindgeschwindigkeiten der Amboss in einer Höhe von über 8 km befindet und damit in einem Temperaturbereich, in dem ein homogenes Gefrieren der Wolkentropfen möglich ist. Die Wolkenobergrenze liegt bei ca. 11 km und damit ebenfalls deutlich höher als bei der Superzelle aus Simulation 5. Noch deutlicher als in Abb. 5.36 erkennt man eine rückwärts geneigte Achse des Aufwind-schlauches.

Die Abbildungen 5.53 und 5.54 zeigen zwei Horizontalschnitte der Radarreflektivität in 4500 bzw. 1500 m Höhe. Überlagert sind jeweils das Vertikalwindfeld durch Isolinien und das Horizontalwindfeld relativ zur Bewegung der Superzelle durch Vektorpfeile dargestellt. In 4500 m Höhe liegt das Maximum der Reflektivität im Bereich des Aufwindgebietes, das eine zyklonale Rotation aufweist. Der Vorticitydipol, der anhand des Windfeldes erkennbar ist, führt zu einem Einströmen aus nordöstlicher Richtung, wodurch sich auch die gebogene Form des Reflektivitätsfeldes erklärt. In 1500 m Höhe ist das Aufwindgebiet noch deutlich schwächer ausgeprägt und es ist ein ausgedehntes Abwindgebiet erkennbar. Das Maximum der Reflektivität ist in dieser Höhe nicht mit dem Aufwind korreliert, sondern liegt im Bereich des Abwindes. Eine bodennahe so genannte Mesozyklone, die sich bei intensiven Superzellen ausbildet und die Tornadoentstehung einleitet, ist hingegen nicht zu erkennen. Nur eine Mesozyklone würde auch zu einem Hakenecho ('hook echo') der Reflektivität führen. Im bodennahen Temperaturfeld, das in Abbildung 5.55 in Form der Temperaturabweichung vom Grundzustand dargestellt ist, ist die Kaltluft, die sich unterhalb der Wolkenbasis ausbildet, zu sehen.

Insgesamt treten bei dieser Simulation viele Charakteristika einer Superzelle, wie man sie auf Grund konzeptioneller Modelle erwarten würde, auf. Manche Eigenschaften, insbesondere die Ausbildung einer Mesozyklone und des Hakenechos erscheinen erst bei höheren Windscherungen und insbesondere einer Richtungsscherung des Grundstroms (Weisman und

Klemp, 1984). Um die Bildung eines Tornados zu simulieren, ist außerdem eine sehr viel höhere räumliche Auflösung erforderlich (Wicker und Wilhelmson, 1995).

5.3.3 Simulation von Multizellensystemen

Bislang wurden gewöhnliche Einzelzellen und Superzellen betrachtet; das dritte Regime, das für hochreichende Konvektion typisch ist, sind so genannte Multizellensysteme. Multizellensysteme bestehen, wie in Abschnitt 2.4 eingeführt, aus einer Vielzahl gewöhnlicher Einzelzellen, wobei jeweils die mit den Abwinden verbundenen Böenfronten neue konvektive Zellen auslösen. Multizellensysteme bilden sich bei hoher CAPE und niedrigen Windgeschwindigkeiten.

Simulation 8 bzw. 9: $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim bzw. kontinental

Anhand von Simulation 8 mit $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$ und $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$ bei maritimen Bedingungen kann eine typische Multizellsituation gezeigt werden. Der Grundzustand besitzt damit den gleichen CAPE-Wert von 2280 J kg^{-1} wie im Fall von Simulation 7, nun aber bei deutlich niedrigeren Windgeschwindigkeiten. Das in Abbildung 5.56 dargestellte MAX-CAPPI der Radarreflektivität nach 120 min Simulationszeit zeigt ein Multizellensystem mit mehreren Reflektivitätsmaxima von über 60 dBZ. Jedes dieser Reflektivitätsmaxima entspricht dabei einem konvektiven Aufwindgebiet und das gesamte System breitet sich mit der Zeit in ein immer größeres Gebiet aus.

Auch bei kontinentalen Bedingungen entsteht in dieser Situation ein Multizellensystem: Dies zeigt das Ergebnis von Simulation 9; in Abb. 5.57 ist wiederum das MAX-CAPPI der Radarreflektivität nach 120 min dargestellt. Im Gegensatz zum maritimen Fall bilden sich jedoch sehr viel weniger konvektive Zellen aus - das Multizellensystem ist weit weniger intensiv.

Eine genauere Analyse der Entstehungsmechanismen der einzelnen Konvektionszellen und der Ausbreitung der Böenfronten, wie sie von Rotunno et al. (1988) beschrieben werden, bleibt späteren Arbeiten überlassen. Da sich Böenfronten mitunter auch in Radar- und Stationsmessungen nachweisen lassen (Hannesen, 1998), bietet sich ein Vergleich mit Beobachtungen an.

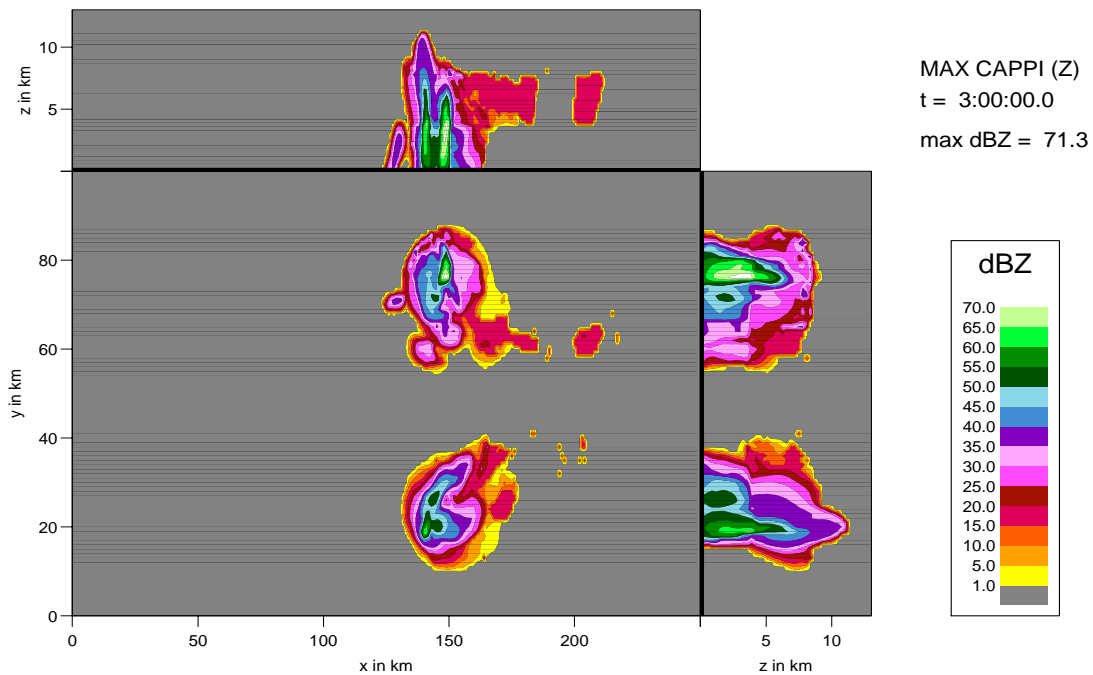


Abbildung 5.51: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 180 min (Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

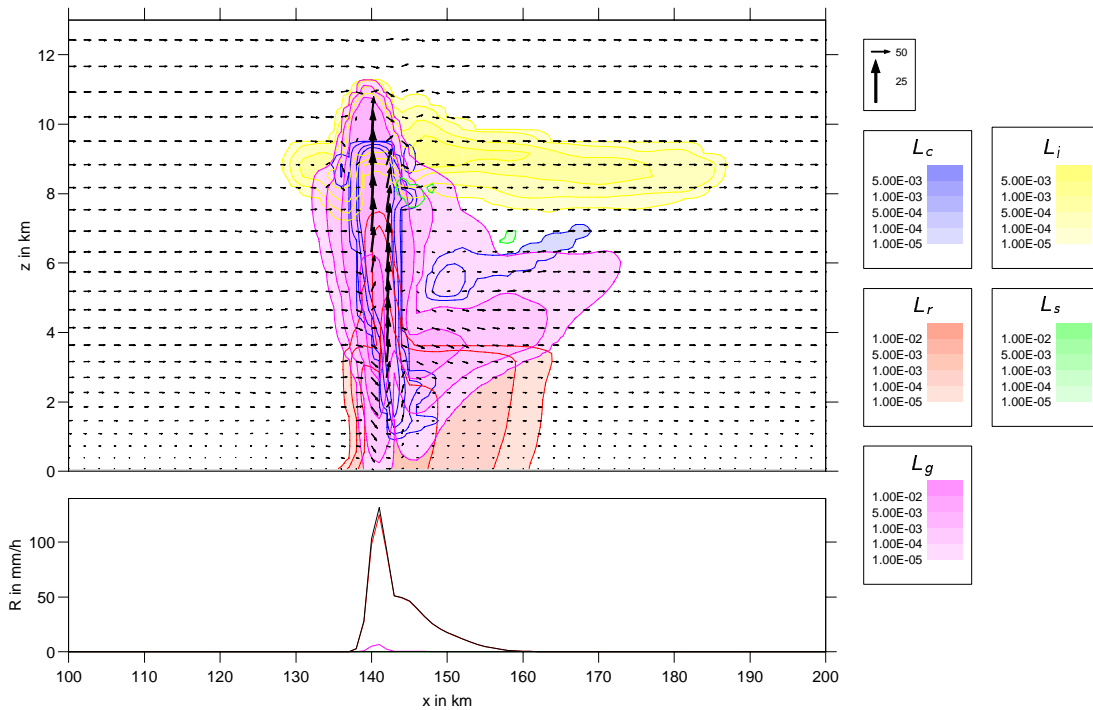


Abbildung 5.52: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 7 bei $y = 20 \text{ km}$ nach 180 min (Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

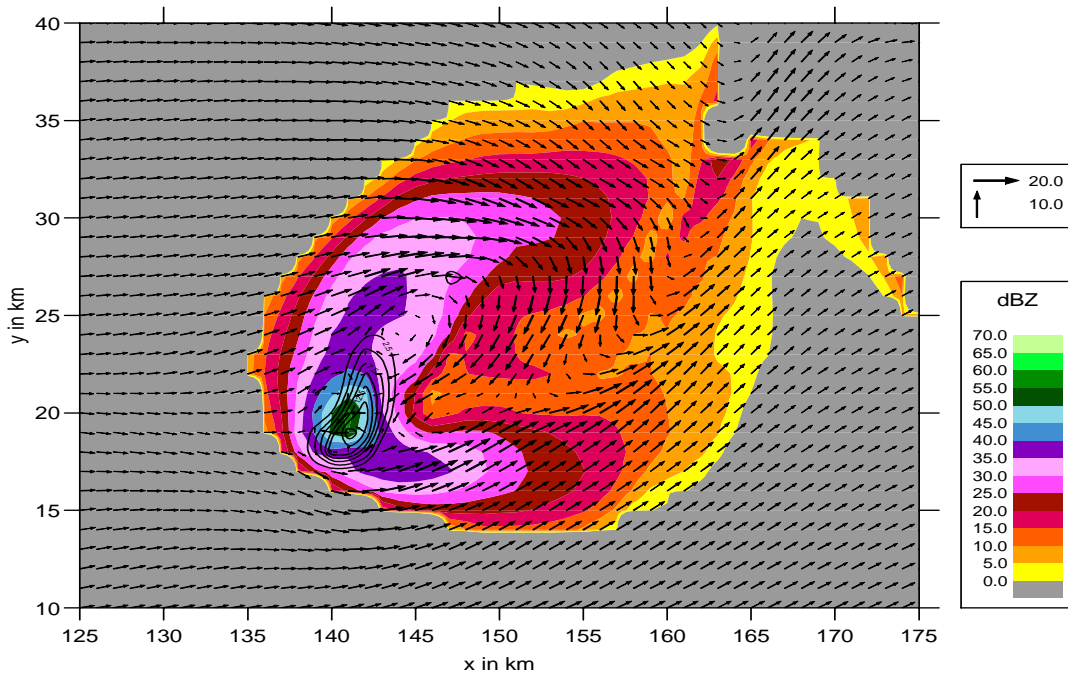


Abbildung 5.53: Horizontalschnitt ($z = 4500 \text{ m}$) der Radarreflektivität in dBZ und der Auf- (—) und Abwindgeschwindigkeit (- - -) in m s^{-1} (Abstand der Isolinien: 2.5 m s^{-1}) nach 180 min. Die Vektorpfeile stellen an jedem Gitterpunkt den Horizontalwind in m s^{-1} dar (Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{\max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

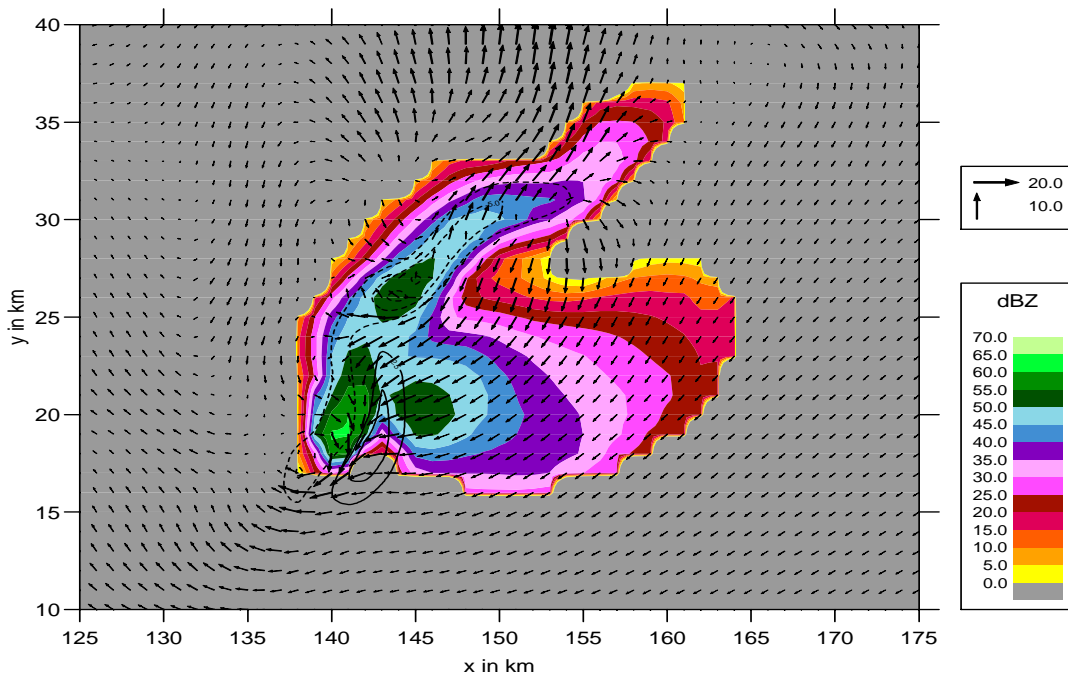


Abbildung 5.54: Wie Abb. 5.53, aber für $z = 1500 \text{ m}$ (Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{\max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

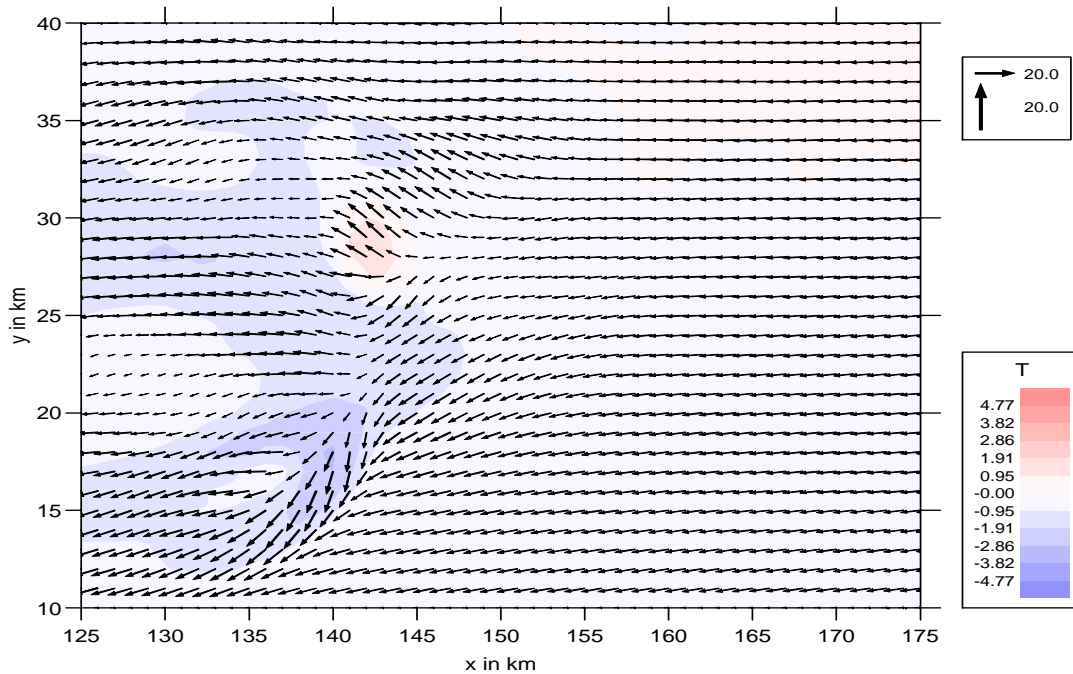


Abbildung 5.55: Horizontalschnitt ($z = 500 \text{ m}$) der Temperaturstörung in K nach 180 min. Die Vektorpfeile stellen an jedem Gitterpunkt den Horizontalwind in m s^{-1} dar (Simulation 7: $u_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $q_{\max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

5.3.4 Der Einfluss der Windgeschwindigkeit und der konvektiv verfügbaren Energie auf die Entwicklung konvektiver Zellen

Wie in den vorangegangenen Abschnitten anhand ausgewählter Simulationen gezeigt wurde, wird die Entwicklung konvektiver Zellen maßgeblich durch die Windgeschwindigkeit bzw. Windscherung und die konvektiv verfügbare Energie bestimmt.

Eine umfassende Untersuchung der atmosphärischen Bedingungen, unter denen bevorzugt gewöhnliche Einzelzellen, Superzellen oder Multizellensysteme auftreten, wurde von Weisman und Klemp (1982) durch eine systematische Variation der Anfangsbedingung bzw. des Grundzustandes durchgeführt. Weisman und Klemp (1982) verwenden für ihre Untersuchung das dreidimensionale Atmosphärenmodell von Klemp und Wilhelmson (1978). Dieses beinhaltet ein einfaches Kesslersches Wolkenschema, wobei ein Schwellenwert der Autokonversionsrate von 1 g m^{-3} vorgegeben wurde, was für konvektive Wolken eine realistischere Entwicklung ergibt als der Wert von 0.5 g m^{-3} , der meist verwendet wird und der auch für Simulation 3 angenommen wurde.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Sensitivitätsuntersuchung nach Weisman

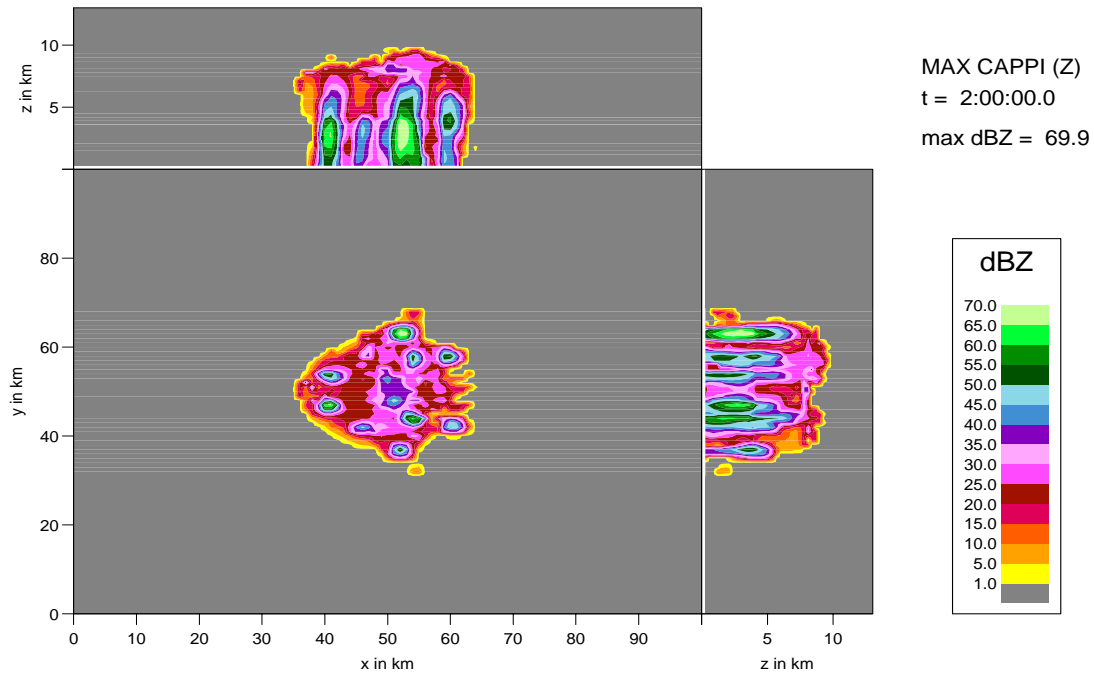


Abbildung 5.56: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 120 min (Simulation 8: $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, maritim).

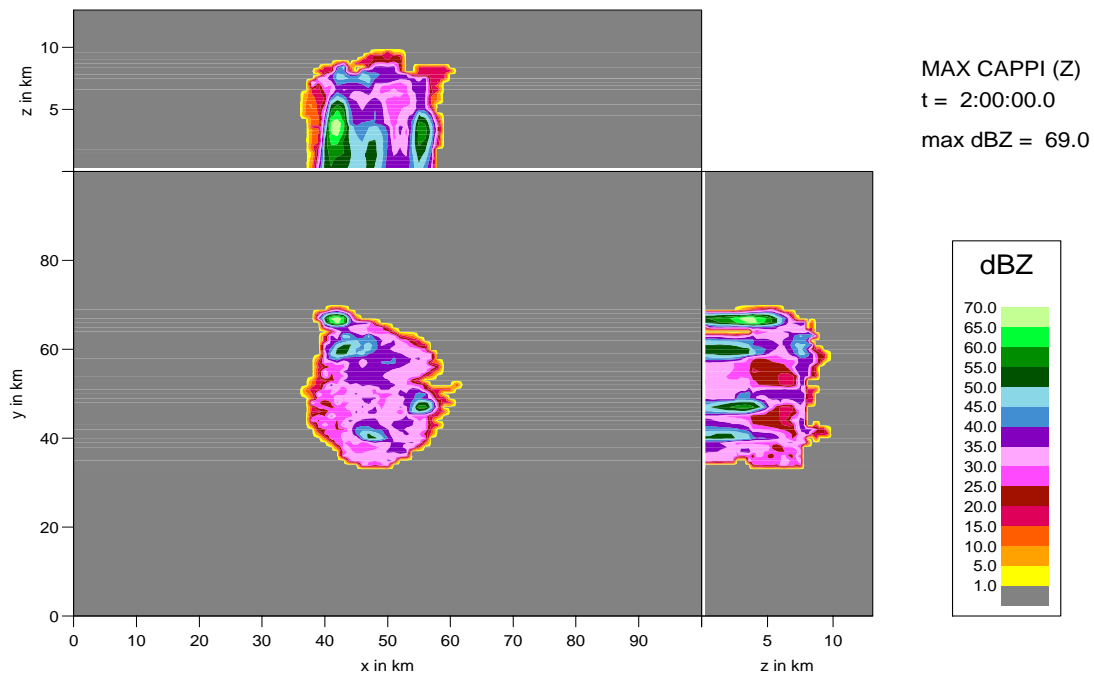


Abbildung 5.57: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 120 min (Simulation 9: $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$, kontinental).

und Klemp (1982) mit dem neu entwickelten Zwei-Momenten-Mischwolkenchema wiederholt, um zu prüfen, ob die Parametrisierung der Wolkenmikrophysik unter den verschiedenen atmosphärischen Bedingungen plausible Resultate ergibt, und um zu untersuchen, ob dabei signifikante Unterschiede zu den von Weisman und Klemp (1982) erhaltenen Ergebnissen auftreten. Dabei wird allerdings nicht nur die maximale Windgeschwindigkeit u_∞ und das maximale Mischungsverhältnis q_{max} variiert, sondern auch jeweils der Einfluss des Aktivierungsspektrums (kontinental bzw. maritim) untersucht. Dies ermöglicht es, Aussagen über den Einfluss der Aerosole auf die Dynamik hochreichender Konvektion unter verschiedenen atmosphärischen Bedingungen zu machen.

Um die Entwicklung der konvektiven Zellen anhand der drei Regime Einzelzellen, Superzellen und Multizellensysteme zu klassifizieren, ist eine möglichst objektive Einteilung anhand der Modellergebnisse erforderlich. Hier wird die folgende Klassifizierung verwendet:

- **Superzellen:** Die Konvektion wird dem Superzellenregime zugeordnet, wenn nach 90 min und 120 min Simulationszeit im MAX-CAPPI ein symmetrisches Paar konvektiver Zellen zu erkennen ist und diese eine maximale Reflektivität von mehr als 40 dBZ aufweisen.
- **Multizellensysteme:** Als Multizellensystem wird die Konvektion dann klassifiziert, wenn nach 120 min oder 180 min Simulationszeit im MAX-CAPPI mindestens drei isolierte konvektive Zellen mit einer maximalen Reflektivität von mehr als 50 dBZ auftreten.

Alle anderen Simulationen, bei denen Niederschlag den Boden erreicht, sind dann den gewöhnlichen Einzelzellen zuzuordnen. Offensichtlich schließt sich die Klassifizierung in Superzellen bzw. Multizellen nicht gegenseitig aus - es kann also auch eine Mischform auftreten. Diese pragmatische Einteilung ist sicherlich nicht optimal, aber sie reicht aus, um im folgenden die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge aufzuzeigen.

In Tabelle 5.4 sind für alle 48 Simulationen dieser Parameterstudie jeweils die Niederschlagssumme nach 180 min und die Klassifizierung entsprechend der obigen Einteilung sowie die Richardson-Zahl aufgeführt. Wie zu erwarten, bilden sich bei hohen Windgeschwindigkeiten ($u_\infty \geq 15 \text{ m s}^{-1}$) Superzellen aus; allerdings nur, wenn die CAPE hoch genug ist, um eine intensive Konvektion aufrecht zu erhalten. Bei $u_\infty = 15 \text{ m s}^{-1}$ ist hierzu eine CAPE von ca. 1000 J kg^{-1} erforderlich, bei $u_\infty = 20 \text{ m s}^{-1}$ treten bereits bei $\text{CAPE} = 825 \text{ J kg}^{-1}$ Superzellen auf. Dabei zeigen die Simulationen, dass die Lebensdauer der Superzellen mit höheren Windgeschwindigkeiten und höherer CAPE zunimmt. Multizellensysteme bilden sich

bei hoher CAPE ($CAPE > 1000 \text{ J kg}^{-1}$) und relativ niedrigen Windgeschwindigkeiten. Es fällt auf, dass maritime Bedingungen die Entstehung von Multizellensystemen begünstigen. Am Beispiel von Simulation 9 mit $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$ und $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$ wurde bereits gezeigt, dass unter maritimen Bedingungen die Multizellensysteme bei gleicher CAPE auch sehr viel intensiver sind, d.h. dass mehr einzelne konvektive Zellen entstehen. In einem Übergangsbereich (hier bei $u_\infty = 15 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} \geq 13 \text{ g kg}^{-1}$) bilden sich unter maritimen Bedingungen Superzellen innerhalb eines Multizellensystems. Betrachtet man die integralen Niederschlagssummen, die in Tabelle 5.4 ebenfalls angegeben sind, so zeigt sich, dass die Niederschlagsmenge im Allgemeinen sowohl mit q_{max} als auch mit u_∞ zunimmt. Außerdem wird unter maritimen Bedingungen generell mehr Niederschlag gebildet als unter kontinentalen. Der Unterschied beträgt dabei oft mehr als einen Faktor zwei, wobei bei sehr kleiner CAPE, d.h. bei einem geringen Feuchteangebot, die kontinentalen Wolken im Gegensatz zu den maritimen keinen Niederschlag produzieren. Die größten absoluten Unterschiede treten innerhalb der Übergangsbereiche zum Multizellen- bzw. Superzellenregime auf. So entsteht für $u_\infty = 5 \text{ m s}^{-1}$, $q_{max} = 13 \text{ g kg}^{-1}$ unter maritimen Bedingungen ein Multizellensystem, das insgesamt $6.50 \times 10^6 \text{ m}^3$ Niederschlag erzeugt und unter kontinentalen Bedingungen nur eine gewöhnliche Einzelzelle, deren Gesamtniederschlag mit $2.61 \times 10^6 \text{ m}^3$ entsprechend niedriger liegt.

Weisman und Klemp (1982), die die Klassifikation in Einzelzellen, Superzellen und Multizellen anhand der zeitlichen Entwicklung der Vertikalgeschwindigkeit vornehmen, finden für Richardson-Zahlen von $Ri = 5$ bis $Ri = 60$ Superzellen, erhalten in diesem Ri -Bereich aber für niedrige Werte der konvektiv verfügbaren Energie CAPE auch Einzelzellen. Multizellen treten bei Weisman und Klemp (1982) für Richardson-Zahlen größer als 40 auf, wenn gleichzeitig q_{max} größer oder gleich 13 g kg^{-1} ist. Exakt dieses Ergebnis zeigen auch die in Tabelle 5.4 zusammengefassten Simulationen für maritime Bedingungen. Für das kontinentale Aktivierungsspektrum treten Multizellensysteme erst bei etwas höheren Richardson-Zahlen und/oder höheren Mischungsverhältnissen auf. Die Resultate von Weisman und Klemp (1982), die auf Basis des einfachen Kessler-Schemas gewonnen wurden, können demnach mit dem in dieser Arbeit entwickelten Mischwolken-Schema bestätigt werden. Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass die Dynamik und die Struktur konvektiver Systeme nicht nur durch die Windgeschwindigkeit bzw. Windscherung des Grundstromes und die CAPE bestimmt werden, sondern dass auch das Aktivierungsspektrum, das maßgeblichen Einfluss auf die Wolkenmikrophysik hat, indirekt die gesamte Dynamik des konvektiven Systems beeinflusst. Insbesondere im Übergangsbereich zwischen gewöhnlichen Einzelzellen und Multizellensy-

stemen bzw. zwischen Multizellensystemen und Superzellen, kann die Wolkenmikrophysik ausschlaggebend dafür sein, welches wolkendynamische Regime sich ergibt.

Hieraus folgt, dass - wie schon Weisman und Klemp (1982) betonen - eine zuverlässige Vorhersage der Entwicklung konvektiver Systeme allein auf Basis der Richardson-Zahl Ri nicht möglich ist (siehe auch Bluestein, 1992; McCaul und Weisman, 2001). Offensichtlich existieren noch weitere Parameter, die berücksichtigt werden müssen. Insbesondere der Einfluss der wolkenmikrophysikalischen Prozesse kann, wie im Rahmen dieser Arbeit anhand der verschiedenen Aktivierungsspektren gezeigt wurde, zu Modifikationen der Wolkendynamik führen. Andere Einflussfaktoren, über deren Wirkung wenig bekannt ist, sind die Orographie und das Temperaturprofil.

Tabelle 5.4: Integrale Niederschlagssumme am Boden in 10^6 m^3 für die verschiedenen Simulationen unter maritimen / kontinentalen Bedingungen und Klassifikation als gewöhnliche Einzelzellen (E), Multizellensysteme (M), Superzellen (S) und nicht regnende Cumuli (C). Die verschiedenen Simulationen sind durch die maximale Windgeschwindigkeit des Grundstroms u_∞ und das maximale Mischungsverhältnis in der Grenzschicht q_{\max} charakterisiert. Außerdem ist jeweils die Richardson-Zahl Ri angegeben.

14	M 8.09 / 6.33 M ($Ri = 470.6$)	M 11.67 / 11.07 M ($Ri = 117.4$)	SM 16.94 / 12.14 S ($Ri = 52.2$)	S 22.90 / 20.73 S ($Ri = 29.4$)	2280
13	M 6.50 / 2.61 E ($Ri = 359.4$)	M 4.62 / 3.52 M ($Ri = 89.8$)	SM 11.09 / 5.33 S ($Ri = 39.9$)	S 15.68 / 12.92 S ($Ri = 22.5$)	1744
12	E 1.32 / 1.25 E ($Ri = 258.9$)	E 1.67 / 1.31 E ($Ri = 64.7$)	S 5.27 / 2.52 S ($Ri = 28.8$)	S 8.79 / 7.11 S ($Ri = 16.2$)	1257
11	E 0.76 / 0.52 E ($Ri = 169.9$)	E 0.94 / 0.59 E ($Ri = 42.5$)	E 1.15 / 0.74 E ($Ri = 18.9$)	S 4.17 / 1.65 S ($Ri = 10.6$)	825
10	E 0.27 / 0.14 E ($Ri = 94.2$)	E 0.29 / 0.11 E ($Ri = 23.6$)	E 0.35 / 0.14 E ($Ri = 10.5$)	E 0.65 / 0.34 E ($Ri = 5.9$)	457
9	E 0.03 / 0.00 C ($Ri = 34.8$)	E 0.02 / 0.00 C ($Ri = 8.7$)	E 0.02 / 0.00 C ($Ri = 3.9$)	E 0.03 / 0.00 C ($Ri = 2.2$)	169
	5	10	15	20	
	u_∞ in m s^{-1}				

 CAPE in J kg^{-1}

5.4 Simulation orographisch induzierter Konvektion

5.4.1 Vorbemerkungen

Der Einfluss der Orographie auf die Entstehung und den Lebenszyklus konvektiver Systeme ist so vielfältig, dass im Rahmen dieser Arbeit nicht der Versuch unternommen werden kann, diese Mechanismen umfassend zu untersuchen und darzustellen. Einen Überblick über die Wechselwirkung von Wolken, Niederschlag und Orographie gibt Hannesen (1998), der anhand von Radarbeobachtungen die Wirkung der Orographie auf stratiforme und konvektive Niederschlagsereignisse in Südwestdeutschland untersucht. Hannesen (1998) gibt auch Beispiele für typische Entwicklungen konvektiver Systeme in orographisch gegliedertem Gelände. Chu und Lin (2000) untersuchen mit einem numerischen Modell die Entstehung und zeitliche Entwicklung orographisch induzierter Konvektion auf der Basis zweidimensionaler Modellrechnungen und kommen dabei im wesentlichen zu dem Ergebnis, dass in Abhängigkeit von der Anströmgeschwindigkeit U bzw. der Froude-Zahl

$$N_{Fr} = \frac{U}{N_f h_b}, \quad (5.22)$$

wobei N_f die Brunt-Väisälä-Frequenz ist und h_b die Höhe des Berges, unterschiedliche Regime existieren. Dabei sind insbesondere zwei Mechanismen interessant: Bei niedrigen Windgeschwindigkeiten bzw. kleinen Froude-Zahlen bildet sich die Konvektion im Luv des Berges und breitet sich durch die Bildung einer ausgeprägten Kalt- bzw. Böenfront luvseitig stromauf aus. Bei hohen Windgeschwindigkeiten bzw. großen Froude-Zahlen hingegen bildet sich die Konvektion leeseitig, wofür Chu und Lin (2000) neben der Advektion insbesondere die brechenden Schwerewellen verantwortlich machen, und breitet sich stromab aus. In einem Übergangsregime bildet sich ein quasi-stationäres konvektives System über dem Berg.

5.4.2 Simulation einer Bergüberströmung

Im folgenden wird ein Beispiel für die Entstehung orographisch induzierter konvektiver Systeme anhand der Simulationen einer Bergüberströmung gezeigt. Hierzu wird ein geländefolgendes Koordinatensystem mit der Orographiefunktion

$$h(x, y) = \frac{h_b}{1 + b_b^{-2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} \quad (5.23)$$

mit $h_b = 2$ km und $b_b = 5$ km verwendet. Die Parameter x_0 und y_0 sind so gewählt, dass sich der Berg in der Mitte des 100 km \times 100 km großen Modellgebietes befindet.

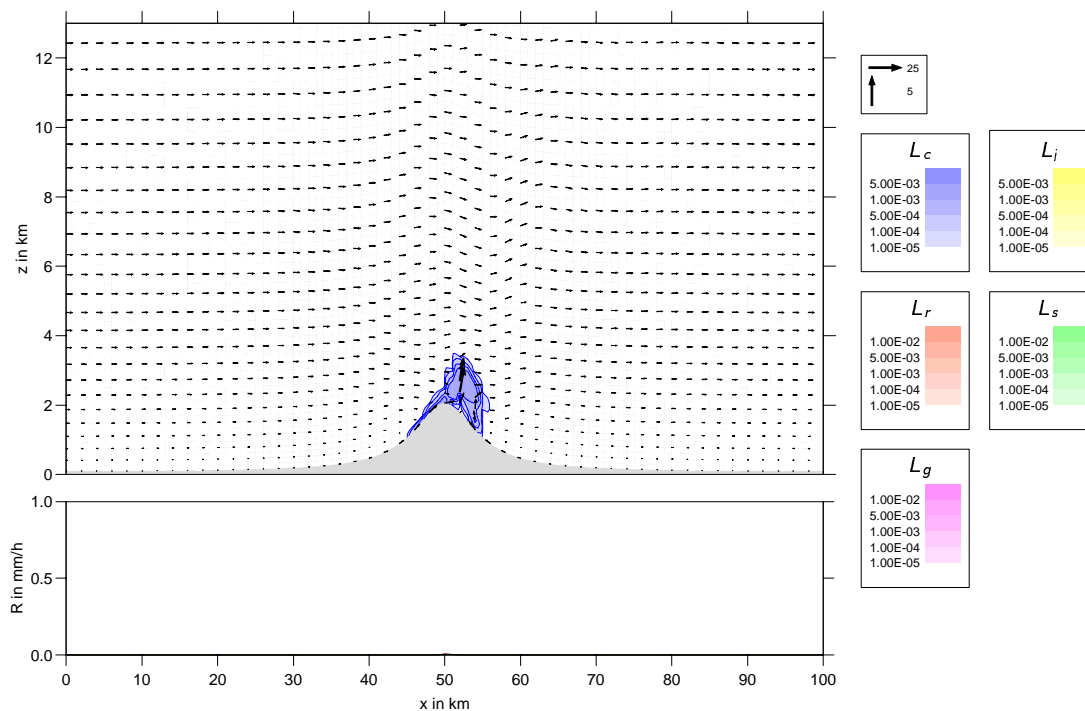


Abbildung 5.58: Wie Abb. 5.4, aber für Simulation 10 nach 18 min.

Als Grundzustand bzw. Anfangsbedingung werden wieder die in Abschnitt 5.2 beschriebenen Vertikalprofile für Temperatur, Feuchte und Windgeschwindigkeit nach Weisman und Klemp (1982) mit $q_{max} = 14 \text{ g kg}^{-1}$ und $u_{\infty} = 5 \text{ m s}^{-1}$ verwendet - nun natürlich ohne die zur Initialisierung rein thermischer Konvektion notwendige Warmluftblase. Chu und Lin (2000) verwenden ebenfalls diese atmosphärischen Bedingungen, untersuchen jedoch einen breiteren Berg mit $b_b = 30 \text{ km}$ und beschränken sich, wie bereits erwähnt, auf eine zweidimensionale Strömung. Die Brunt-Väisälä-Frequenz hat unter diesen atmosphärischen Bedingungen in 850 hPa näherungsweise den Wert $6 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ (siehe z.B. Chu und Lin, 2000), woraus sich für die Bergüberströmung eine Froude-Zahl von $N_{Fr} \approx 0.4$ ergibt. Auf Grund der Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte sowie der Arbeiten von Weisman und Klemp (1982) sowie Chu und Lin (2000) ist zu erwarten, dass sich unter diesen Bedingungen im Lee des Berges ein Multizellensystem ausbilden wird.

Abbildung 5.58 zeigt einen xz-Schnitt der Hydrometeormassendichten bei $y = 50 \text{ km}$ nach 18 min Simulationszeit: Am luvseitigen Westhang des Berges hat sich, ab der Höhe des Hebungskondensationsniveaus, eine auf dem Berg aufliegende orographische Wolke gebildet; allerdings wird keine Konvektion ausgelöst. Dies geschieht erst im Lee des Berges, wenn auf Grund der Überströmung Schwerewellen entstehen. Da das Niveau freier Konvektion ungefähr in 2000 m Höhe liegt, reicht die geringe Vertikalbewegung der Schwerewellen

aus, dass hier Konvektion einsetzt. Diese entwickelt sich im Laufe der Zeit ähnlich, wie dies bereits in den vorangehenden Abschnitten gezeigt wurde. So erkennt man in Abbildung 5.59, die die Situation nach 36 min Simulationszeit zeigt, die typische Entwicklungsphase einer konvektiven Zelle mit starken Vertikalbewegungen, Graupelbildung aus gefrorenen Regentropfen und einsetzendem Niederschlag am Boden. Abbildung 5.60 zeigt das zugehörige MAX-CAPPI mit der konvektiven Zelle im Lee des Berges, die Reflektivitäten von über 70 dBZ aufweist. Im weiteren (Abb. 5.62 und 5.61) durchläuft diese Zelle ein Zellsplitting und es entstehen, ausgelöst durch die Böenfront dieser Primärzelle, aber auch auf Grund der Schwerewellen und der Konvergenzzone im Lee des umströmten Berges weitere neue konvektive Zellen. Nach 90 min hat sich im Lee des Berges ein Multizellensystem gebildet, das aus fünf Einzelzellen besteht und sich bis in 11 km Höhe erstreckt, lokal treten dabei kurzzeitig Niederschlagsraten über 200 mm h^{-1} auf .

Bei Simulationen mit niedrigerer Anströmgeschwindigkeit, größerer Berghöhe oder -breite, die hier nicht gezeigt werden, tritt zum Teil luvseitig Konvektion auf - jedoch kann das von Chu und Lin (2000) im zweidimensionalen Fall gefundene Regime, das bei großen Froude-Zahlen zu einer luvseitigen Ausbreitung der Konvektion führt, im dreidimensionalen Fall, d.h. für einen freistehenden Einzelberg, nicht nachgewiesen werden. Dies kann dadurch erklärt werden, dass bei einem freistehenden Einzelberg bei großen Froude-Zahlen eine Umströmung stattfindet, während es im zweidimensionalen Fall, d.h. bei einem quer zur Anströmung unendlich ausgedehnten Bergrücken, luvseitig zu einer blockierenden Strömung kommt.

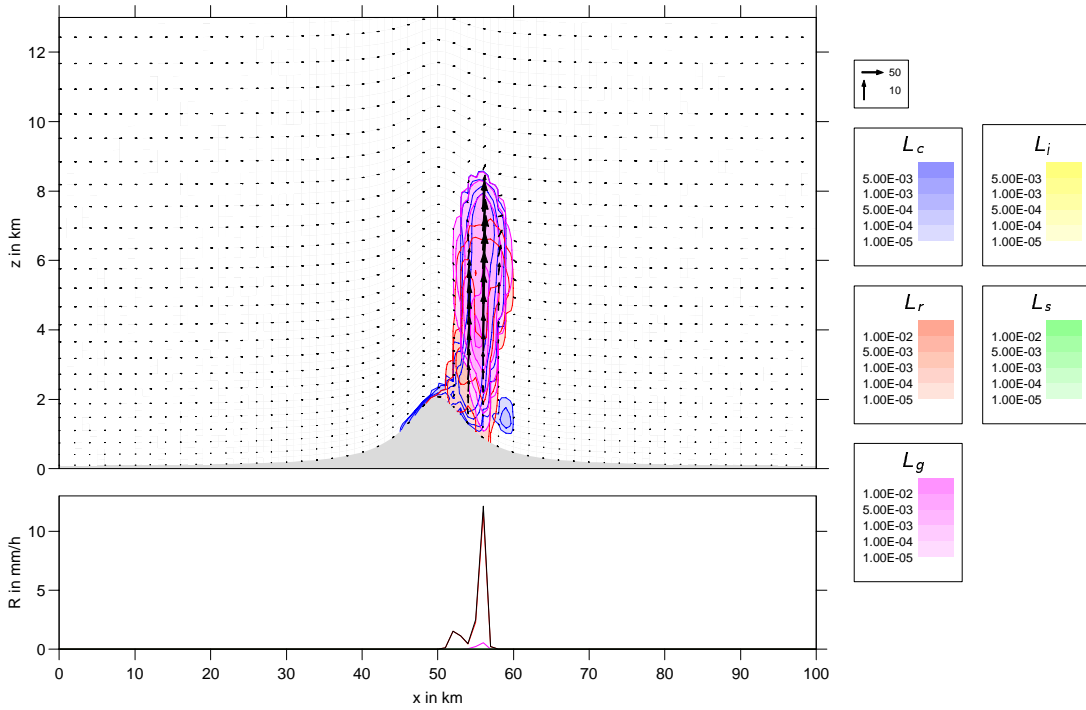


Abbildung 5.59: Wie Abb. 5.58, aber nach 36 min.

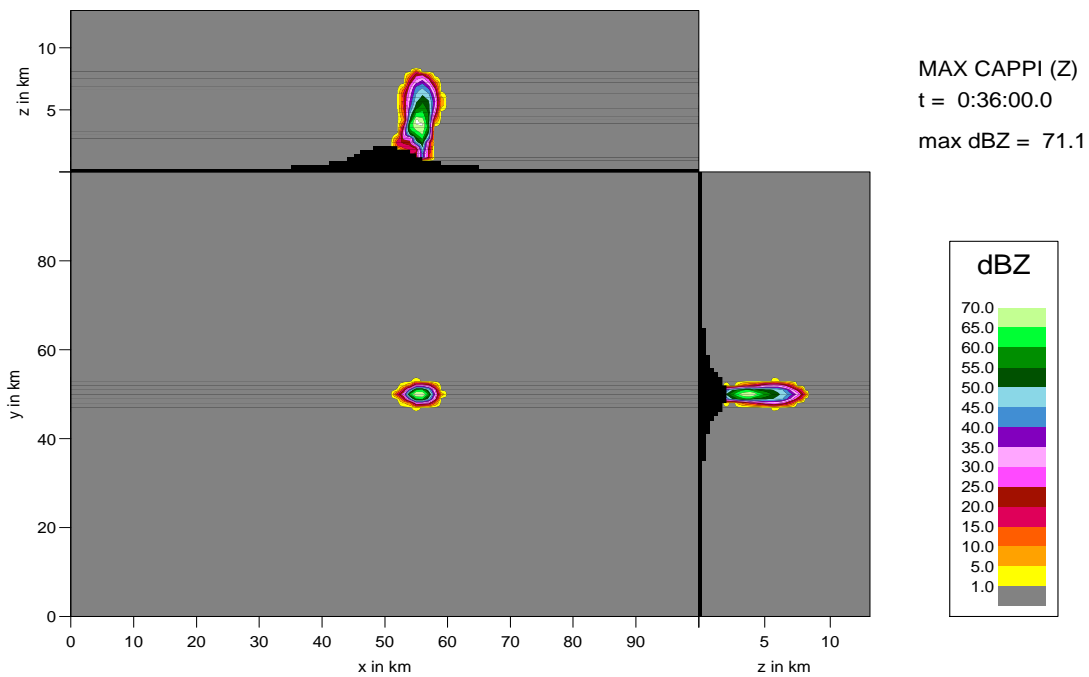


Abbildung 5.60: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 36 min.

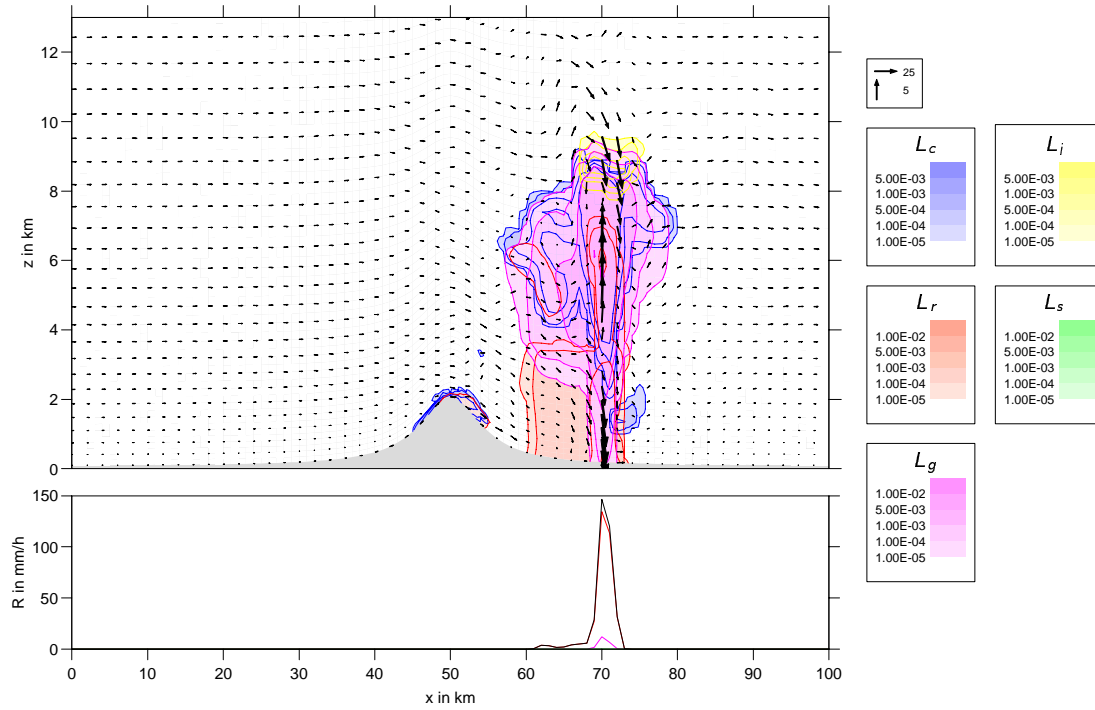


Abbildung 5.61: Wie Abb. 5.58, aber nach 90 min.

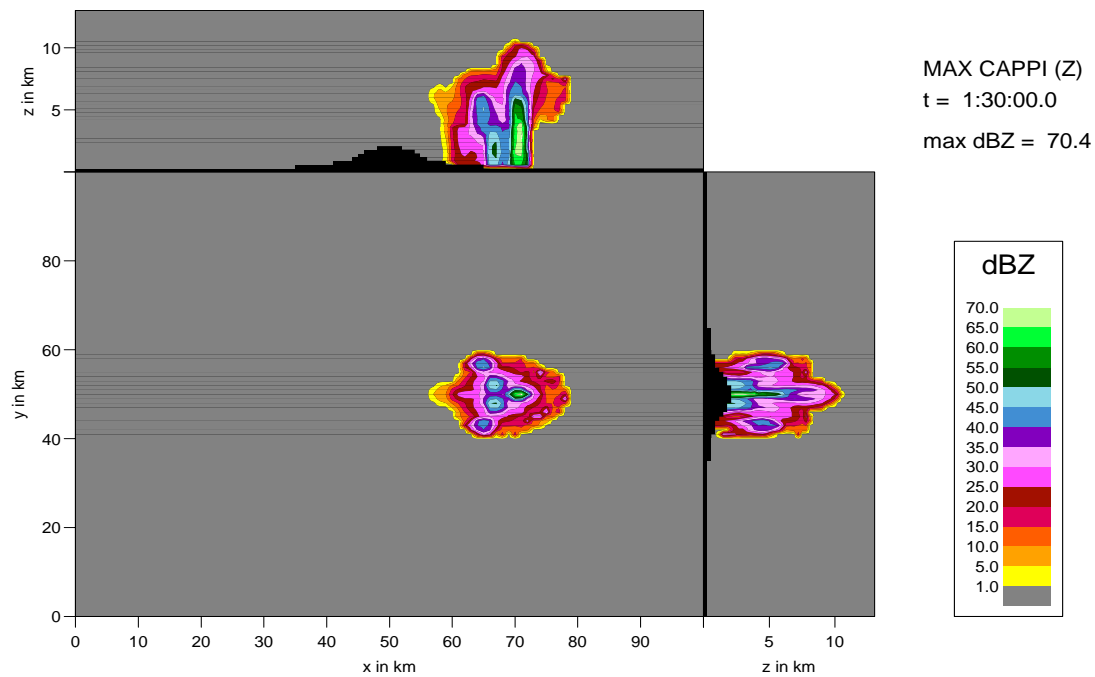


Abbildung 5.62: MAX-CAPPI-Darstellung der Radarreflektivität in dBZ nach 90 min.

Kapitel 6

Schlussbetrachtungen

6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zur genaueren Beschreibung wolkenmikrophysikalischer Prozesse in Mischwolken dar, mit dem Ziel die Simulation und Vorhersage konvektiver Systeme durch numerische Atmosphärenmodelle zu verbessern.

Hierzu wurde eine neue Parametrisierung der Stoßprozesse von Tropfen formuliert, die auf der spektralen kinetischen Gleichung basiert. Diese Parametrisierung, die die klassische Aufteilung des Tropfenspektrums in kleine Wolkentropfen und große Regentropfen beibehält, verwendet zur Beschreibung der Eigenschaften des Tropfenensembles in den Größenbereichen der Wolken- und Regentropfen jeweils zwei Momente der Anzahldichteverteilungsfunktion: die Anzahldichte und die Massendichte der Wolken- bzw. Regentropfen. Um die Parametrisierungsgleichungen für die im Rahmen dieser Beschreibung auftretenden integralen wolkenmikrophysikalischen Prozesse Autokonversion, Akkreszenz und Selbsteinfang zu formulieren, wurde aus der kinetischen Gleichung ein System prognostischer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Momente der Anzahldichteverteilung der Wolken- und Regentropfen hergeleitet. Aus dieser Betrachtung konnten Näherungen für die gesuchten Änderungs- und Umwandlungsraten gewonnen werden. Es konnte außerdem gezeigt werden, dass Invarianzeigenschaften der kinetischen Gleichung auf eine Ähnlichkeitstheorie führen, die es erlaubt, die zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums während des Koagulationsprozesses im Rahmen der Parametrisierung durch universelle Funktionen zu berücksichtigen. Diese universellen Funktionen wurden durch numerische Simulation des Koagulationsprozesses bestimmt. Die Rechnungen bestätigen außerdem die Gültigkeit der Ähnlichkeitstheorie. Das neu entwickelte Parametrisierungskonzept wurde gegenüber gebräuchlichen Konzepten auch

dadurch erweitert, dass die Wirkung der kleinskaligen atmosphärischen Turbulenz und des Zerplatzens großer Tropfen innerhalb einer Zwei-Momenten-Parametrisierung quantitativ parametrisiert wurde. Anhand umfassender Vergleichsrechnungen mit einem eindimensionalen Niederschlagsmodells konnte gezeigt werden, dass die Parametrisierung in einem weiten Parameterbereich eine gute Übereinstimmung mit einer expliziten numerischen Lösung der exakten kinetischen Gleichung ergibt.

Die Parametrisierung der Kollisionswechselwirkungen der Hydrometeore in Mischwolken konnte durch eine neue, allgemein anwendbare Approximation der integralen Wachstumsgleichungen verbessert werden. Das daraus resultierende Zwei-Momenten-Verfahren ermöglicht eine effiziente Berechnung der Wirkung des Bereifens von Eispartikeln bzw. deren Aggregation auf die Anzahl- und Massendichten der Hydrometeore. Zur Parametrisierung der mittleren Kollisionseffizienz wurde ein stückweise linearer Ansatz vorgeschlagen.

Für alle weiteren wolkenmikrophysikalischen Prozesse wie z.B. die Nukleation der Wolkentropfen und Eispartikel, das Kondensations- bzw. Depositionswachstum, die Konversion der Eiskristalle zu Graupel und auch die Sedimentation der Partikel wurden die im Rahmen einer Zwei-Momenten-Parametrisierung konsistenten Formulierungen hergeleitet und diskutiert.

Alle neu entwickelten Parametrisierungen der wolkenmikrophysikalischen Prozesse wurden in das mesoskalige Atmosphärenmodell KAMM2 implementiert. Dies ermöglicht es, die raum-zeitliche Entwicklung von Mischwolken unter Berücksichtigung aller relevanten wolkenmikrophysikalischen Prozesse zu simulieren. Anhand zahlreicher Modellrechnungen unter idealisierten atmosphärischen Bedingungen konnte gezeigt werden, dass mit dem Zwei-Momenten-Verfahren die wesentlichen physikalischen Prozesse in konvektiven Mischwolken sinnvoll erfasst werden. Ein Vergleich mit dem oft verwendeten Kesslerschen Ein-Momenten-Schema zeigt, dass die neue Koagulationsparametrisierung und das darauf aufbauende Mischwolkenchema deutlich realistischere Ergebnisse liefert. Ein wichtiges Ergebnis war, dass - auch unter kontinentalen Bedingungen - der dominante niederschlagsbildende Prozess die Bildung großer Tropfen durch Koagulation ist. Gelangen diese Tropfen durch vertikale Transportprozesse innerhalb der Wolken in höhere, kältere Schichten der Atmosphäre, so gefrieren die Tropfen und führen zur Graupelbildung, was die Niederschlagsbildung weiter intensiviert.

Auf Grund der Verwendung von zwei Momenten je Partikelklasse und der damit verbundenen expliziten Größeninformation ist es auch möglich, die unterschiedliche wolkenmikrophysikalische Entwicklung von Mischwolken unter maritimen bzw. kontinentalen atmosphärischen Bedingungen zu untersuchen. Dabei hat sich gezeigt, dass die Wolkenentwicklung unter

kontinentalen Bedingungen langsamer und weniger intensiv verläuft. Durch die geringe Effizienz der Nukleations- und Koagulationsprozesse unter kontinentalen Bedingungen entstehen jedoch deutlich höhere Wolkenwassergehalte und größere Niederschlagspartikel.

Durch Variation der Anfangsbedingung bzw. des Grundzustandes konnte die Dynamik thermischer Konvektion in verschiedenen Regimen simuliert werden. So treten bei niedriger konvektiv verfügbarer Energie und niedrigen Windgeschwindigkeiten gewöhnliche Einzelzellen auf, die eine Lebensdauer von ein bis zwei Stunden besitzen. Steht mehr potentielle Energie zur Verfügung, so bilden sich auf Grund des Niederschlags Böenfronten, die bodennahe feuchtwarme Luft zum Aufsteigen anregen und damit wieder neue Einzelzellen auslösen, wodurch im Laufe der Zeit ein Multizellensystem entsteht. Bei hohen Windgeschwindigkeiten führt in erster Linie die Wirbeldynamik der Strömung dazu, dass sich sehr langlebige, quasi-stationäre und intensive konvektive Zellen ausbilden, die als Superzellen bezeichnet werden. Die Beeinflussung der Strömung durch die Niederschlagsbildung ('liquid water drag') spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle. Mit dem neu entwickelten Mischwolkenchema konnte erstmals eine systematische Untersuchung der Unterschiede dieser wolkendynamischen Prozesse unter kontinentalen bzw. maritimen Bedingungen durchgeführt werden. Es stellte sich heraus, dass die Entwicklung von Superzellen kaum auf Änderungen des Aktivierungsspektrums reagiert, während Multizellensysteme unter maritimen Bedingungen deutlich intensiver sind und mehr Einzelzellen produzieren als unter kontinentalen Bedingungen. Mit dieser Untersuchung konnte die Einteilung der atmosphärischen Bedingungen in die verschiedenen Regime der hochreichenden Konvektion nach Weisman und Klemp (1982) im wesentlichen bestätigt und um einen wichtigen Einflussparameter erweitert werden.

Die Entwicklung orographisch induzierter Konvektion konnte im Rahmen dieser Arbeit nur exemplarisch anhand der Simulation einer Bergüberströmung gezeigt werden. Dabei bildet sich, ausgelöst durch orographisch bedingte Schwerewellen, im Lee des Berges ein intensives Multizellensystem.

6.2 Diskussion und Ausblick

Die Simulation und Vorhersage konvektiver Systeme stellt auch heute noch eine große Herausforderung dar. Obwohl in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte erzielt werden konnten, bleibt immer noch eine große Unsicherheit - selbst bei grundlegenden Fragen. Gerade im Bereich der Wolkenmikrophysik sind viele Prozesse noch nicht mit hinreichender Genauigkeit bekannt. Dies sind insbesondere die Nukleation der Eispartikel und die Wechselwirkung

zwischen der atmosphärischen Turbulenz und den wolkenmikrophysikalischen Prozessen.

Unter diesen Randbedingungen leistet die vorliegende Arbeit einen kleinen Beitrag zu einem besseren Verständnis der physikalischen Prozesse in konvektiven Systemen. Im Rahmen dieser Arbeit konnte bei der Parametrisierung wolkenmikrophysikalischer Prozesse in vielen Bereichen eine deutliche Verbesserung erzielt werden, andererseits ist die Parametrisierung einiger wolkenmikrophysikalischer Prozesse, die hier nicht im Mittelpunkt der Betrachtungen standen, noch nicht hinreichend genau geklärt. Dies betrifft insbesondere die Behandlung der Nukleation - sowohl der Tropfen als auch der Eispartikel. Auch die Anwendung der Sättigungsadjustierung zur Berechnung der Kondensation ist unbefriedigend, da dies im Widerspruch zu anderen Parametrisierungsannahmen steht. Bei der Parametrisierung der Wachstumsprozesse von Graupel und Hagel bleiben bislang die unterschiedlichen Temperaturregime (nasses und trockenes Wachstum, siehe z.B. Straka, 1989) unberücksichtigt.

Der große Vorteil der Anwendung numerischer Atmosphärenmodelle zur Simulation konvektiver Mischwolken ist es, einen detaillierten Einblick in deren Dynamik und Wolkenmikrophysik zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang muss aber festgestellt werden, dass bislang kein Vergleich der Simulationsergebnisse mit Messdaten durchgeführt werden konnte, dies liegt auch daran, dass es außerordentlich schwierig ist, die raum-zeitliche Entwicklung von konvektiven Wolken messtechnisch zu erfassen. Vollständige in-situ Datensätze, insbesondere hinsichtlich der Evolution der mikrophysikalischen Parameter, sind so gut wie nicht vorhanden. Ein solcher Vergleich wäre jedoch erforderlich, um die Zuverlässigkeit der neu entwickelten Parametrisierungen zu überprüfen. Ob eine Verifikation von Modellergebnissen anhand von Radar- und/oder in-situ-Messdaten allerdings ohne ein aufwendiges Datenassimilationsverfahren sinnvoll ist, bleibt bei der Vielzahl der Modellparameter und der sehr empfindlichen Abhängigkeit der Simulationsergebnisse von den Anfangsbedingungen offen.

Anhang A

Verteilungsfunktionen

A.1 Die verallgemeinerte Gamma-Verteilung

Eine möglichst allgemeine Verteilungsfunktion, die gemessene Partikelverteilungen gut beschreibt und viele gebräuchliche Verteilungsfunktionen als Spezialfälle enthält, ist die so genannte verallgemeinerte Gamma-Verteilung (auch Hypergamma-Verteilung; generalized gamma distribution; modified gamma distribution; siehe z.B. Suzuki, 1964; Flatau et al., 1989; Considine und Curry, 1996; Cohard und Pinty, 2000a, 2000b; auf der Maur, 2001):

$$f(x) = A x^\nu e^{-\lambda x^\mu}. \quad (\text{A.1})$$

Der Fall $\mu = 1$ ist die Gamma-Verteilung bzgl. der Teilchenmasse x ; für $\mu = 0$, $\nu = 0$ erhält man die Exponential-Verteilung in x . Obwohl hier die innere Koordinate x die Teilchenmasse ist, enthält diese Verteilungsfunktion mit $\mu = 1/3$ auch Gamma- bzw. Exponentialverteilungen bzgl. des Durchmessers D . Als weiterer Spezialfall tritt außerdem die Gauß-Verteilung auf ($\mu = 2$, $\nu = 0$).

In der obigen Darstellung sind die Parameter A und λ nicht einheitenfrei, d.h. es treten im Allgemeinen reelle Potenzen physikalischer Einheiten auf. Sinnvoller ist es, diese Parameter durch die Anzahldichte N und die Massendichte L zu ersetzen. Diese wichtigen Größen sind das nullte bzw. erste Moment der Verteilungsfunktion $f(x)$:

$$N = \int_0^{\infty} f(x) dx, \quad L = \int_0^{\infty} x f(x) dx. \quad (\text{A.2})$$

Führt man die Integrationen aus, so erhält man Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} y^{\xi} e^{-\lambda y} dy = \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\lambda^{\xi+1}}, \quad (\text{A.3})$$

die auf die Gamma-Funktion zurückgeführt werden (Bronstein und Semendjajew, 1991). Für die gesuchten Parameter ergibt sich damit:

$$A = \frac{\mu N}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \lambda^{\frac{\nu+1}{\mu}} \quad \text{und} \quad \lambda = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \bar{x} \right]^{-\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist $\bar{x} = L/N$ die mittlere Teilchenmasse. Eine physikalisch sinnvollere, aber auch kompliziertere Darstellung der Verteilungsfunktion (A.1) ist

$$f(x) = \frac{N}{\bar{x}} \left[\frac{x}{\bar{x}} \right]^{\nu} \frac{\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \right]^{\nu+1} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right) x}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right) \bar{x}} \right]^{\mu} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Die massengewichteten Momente sind dann durch

$$M^n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\mu}\right)} \right]^n N \bar{x}^n \quad (\text{A.6})$$

gegeben.

A.2 Die Gamma-Verteilung

Als Gamma-Verteilung wird in der Wolkenphysik die Verteilungsfunktion

$$f(x) = A x^{\nu} e^{-\lambda x} \quad (\text{A.7})$$

bezeichnet (Clark, 1974; Ulbrich, 1983; Haddad et al., 1996). In der Literatur findet man aber auch Pearson III-Verteilung (Berry und Reinhardt, 1974a) oder Schulz-Verteilung. Aus (A.1) erhält man diese 3-parametrische Verteilung z.B. durch $\mu = 1$. Die Parameter A und λ sind hier durch

$$A = \frac{N}{\Gamma(\nu + 1)} \lambda^{\nu+1} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\nu + 1}{\bar{x}} \quad (\text{A.8})$$

gegeben. Gleichung (A.5) vereinfacht sich mit $\mu = 1$ zu

$$f(x) = \frac{N}{\bar{x}} \left[\frac{x}{\bar{x}} \right]^{\nu} \frac{(\nu + 1)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 1)} \exp \left[-(\nu + 1) \frac{x}{\bar{x}} \right] \quad (\text{A.9})$$

und für die Momente erhält man

$$M^n = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{(\nu + 1)^n \Gamma(\nu + 1)} N \bar{x}^n = \frac{N \bar{x}^n}{(\nu + 1)^n} \prod_{k=1}^n (\nu + k). \quad (\text{A.10})$$

A.3 Die Exponential-Verteilung

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist die Exponential-Verteilung, die nur noch zwei freie Parameter besitzt: A und λ . Aus (A.1) gewinnt man sie durch $\mu = 1$ und $\nu = 0$:

$$f(x) = A e^{-\lambda x}. \quad (\text{A.11})$$

Verwendet man statt A und λ die Teilchen- und Massendichte bzw. die mittlere Teilchenmasse, so ergibt sich hier:

$$f(x) = \frac{N}{\bar{x}} \exp\left[-\frac{x}{\bar{x}}\right]. \quad (\text{A.12})$$

Diese Exponential-Verteilung ist nicht äquivalent zu der von Marshall und Palmer (1948) zur Approximation von Regentropfenspektren verwendeten Exponential-Verteilung, da diese als innere Koordinate den Teilchendurchmesser $D \sim x^{\frac{1}{3}}$ verwendet haben. Exponential-Verteilungen bzgl. des massenäquivalenten Durchmessers \hat{D} beschreiben jedoch auch gemessene (mittlere) Spektren von Schneeflocken (Gunn und Marshall, 1957) und Graupelpartikeln (Federer und Waldvogel, 1975) am besten. Dabei ist der massenäquivalente Durchmesser \hat{D} der Durchmesser eines Tropfens mit gleicher Masse. Wählt man in Gl. (A.5) $\nu = -2/3$ und $\mu = 1/3$, so ergibt sich die Exponential-Verteilung bzgl. des (massenäquivalenten) Durchmessers:

$$f(x) = A x^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad f(\hat{D}) = \hat{A} e^{-\hat{\lambda} \hat{D}}, \quad (\text{A.13})$$

dabei ist $f(x)dx = f(\hat{D})d\hat{D}$ und $\bar{x} \sim \hat{D}^3$ zu beachten. Insbesondere gilt in diesem Fall $Z = 20N\bar{x}^2$.

Anhang B

Berechnung der Radarreflektivität

Radarmessungen von Niederschlagsereignissen ermöglichen es, die dreidimensionale Struktur und raum-zeitliche Dynamik mit einer guten räumlichen und zeitlichen Auflösung zu erfassen. Auf Grund der Komplexität der wolkenmikrophysikalischen Zustände ist es jedoch sehr schwierig, aus Radarmessungen auf quantitative wolkenmikrophysikalische Größen zu schließen. Um aus der vom Radar gemessenen Größe, dem Radarreflektivitätsfaktor Z_{radar} wolkenphysikalisch relevante Größen wie z.B. die Regenrate R_r oder den Regenwassergehalt L_r zu berechnen, werden meist einfache Potenzrelationen verwendet. Zur Verifikation eines numerischen Modells ist dieser Ansatz jedoch nicht geeignet, da die Fehler dieser $Z_{radar}-R_r$ - oder $Z_{radar}-L_r$ -Beziehungen im Einzelfall sehr groß sein können. Es ist deshalb sinnvoller, an dieser Stelle den umgekehrten Weg zu gehen: Anstatt aus der gemessenen Größe Radarreflektivität auf die Werte einzelner Modellvariablen wie z.B. des Regenwassergehaltes L_r oder der Massendichte von Graupel L_g zu schließen, wird aus den relevanten Modellvariablen die im Rahmen der Modellapproximationen konsistente Näherung der gemessenen Größe berechnet. Das Resultat einer Simulation kann dann durch den direkten Vergleich dieses vom Modell berechneten Radarreflektivitätsfaktors mit dem von einem Radar gemessenen validiert werden.

Obwohl es sehr viel einfacher ist, aus den Modellvariablen den Radarreflektivitätsfaktor Z_{radar} zu berechnen, als umgekehrt, ist auch dies nicht ohne Approximationen und Annahmen möglich. Im folgenden wird kurz dargestellt wie die Radarreflektivität berechnet werden kann und welche Annahmen auf eine, mit der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Zwei-Momenten-Parametrisierung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse, konsistente Näherung führen.

Ausgangspunkt ist die Rayleigh-Näherung für den Streuquerschnitt von Tropfen, womit die

folgende Beziehung für die Radarreflektivität von Tropfen resultiert:

$$\eta_w = \frac{\pi^5 |K_w|^2}{\lambda_R^4} \int_0^{\infty} D^6 f_w(D) dD, \quad (\text{B.1})$$

dabei ist λ_R die Wellenlänge der Radarstrahlung und $K_w^2 = 0.93$ der Dielektrizitätsfaktor von Wasser. Um einen geräteunabhängigen Messwert zu erhalten, wird meist der Reflektivitätsfaktor

$$\tilde{Z}_w = \frac{\lambda_R^4}{\pi^5 |K_w|^2} \eta_w = \int_0^{\infty} D^6 f_w(D) dD = \left(\frac{6}{\pi \rho_w} \right)^2 \int_0^{\infty} x^2 f_w(x) dx = \left(\frac{6}{\pi \rho_w} \right)^2 Z_w \quad (\text{B.2})$$

angegeben. Da für das Rückstreuverhalten der massenequivalente Durchmesser bzgl. der Materialdichte ρ_w bzw. ρ_ε entscheidend ist (Marshall und Gunn, 1952; Smith, 1984), ergibt sich für sphärische Eispartikel wie z.B. Graupel entsprechend

$$\eta_g = \frac{\pi^5 |K_\varepsilon|^2}{\lambda_R^4} \left(\frac{6}{\pi \rho_\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\infty} x^2 f_g(x) dx, \quad (\text{B.3})$$

wobei $K_\varepsilon^2 = 0.176$ der Dielektrizitätsfaktor von Eis ist. Der geräteunabhängige äquivalente Reflektivitätsfaktor für Graupel ergibt sich damit zu:

$$\tilde{Z}_e = \frac{\lambda_R^4}{\pi^5 |K_w|^2} \eta_g = \frac{|K_\varepsilon|^2}{|K_w|^2} \left(\frac{6}{\pi \rho_\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\infty} x^2 f_g(x) dx = \frac{|K_\varepsilon|^2}{|K_w|^2} \left(\frac{6}{\pi \rho_\varepsilon} \right)^2 Z_g. \quad (\text{B.4})$$

Für schmelzende Eispartikel muss aber K_w^2 statt K_ε^2 angesetzt werden, d.h. näherungsweise kann der äquivalente Reflektivitätsfaktor für Graupel als Funktion der Temperatur durch

$$\tilde{Z}_g = \begin{cases} \frac{|K_\varepsilon|^2}{|K_w|^2} \left(\frac{6}{\pi \rho_\varepsilon} \right)^2 Z_g, & \text{für } T < T_3, \\ \left(\frac{6}{\pi \rho_\varepsilon} \right)^2 Z_g, & \text{für } T \geq T_3 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

berechnet werden. Der äquivalente Radarreflektivitätsfaktor für eine Mischung verschiedener Partikel ist die Summe der einzelnen Reflektivitätsfaktoren. Damit ergibt sich

$$Z_{radar} = \tilde{Z}_c + \tilde{Z}_r + \tilde{Z}_g + \tilde{Z}_s + \tilde{Z}_i \quad (\text{B.6})$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{6}{\pi \rho_w} \right)^2 \left[Z_r + Z_c + \frac{\rho_w^2}{\rho_\varepsilon^2} \frac{|K_\varepsilon|^2}{|K_w|^2} (Z_g + Z_s + Z_i) \right], & \text{für } T < T_3, \\ \left(\frac{6}{\pi \rho_w} \right)^2 \left[Z_r + Z_c + \frac{\rho_w^2}{\rho_\varepsilon^2} (Z_g + Z_s + Z_i) \right], & \text{für } T \geq T_3. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Meist wird der Reflektivitätsfaktor durch

$$dBZ = \frac{10}{\ln 10} \ln \left[\frac{Z_{radar}}{\text{mm}^6 \text{ m}^{-3}} \right] \quad (\text{B.8})$$

angegeben. Diese Größe wird der Einfachheit halber oft auch als Radarreflektivität oder - noch einfacher - als Reflektivität bezeichnet. Für die Simulationen auf der Basis des Kessler-schen Ein-Variablen-Schemas in Abschnitt 5.3.1 wird zur Berechnung der Radarreflektivität

$$dBZ = \frac{10}{\ln 10} \ln \left[2.05 \times 10^4 \left(\frac{L_r}{\text{g m}^{-3}} \right)^{\frac{7}{4}} \right] \quad (\text{B.9})$$

verwendet (siehe z.B. Dotzek, 1999).

Literatur

- Abramowitz, M. und I. A. Stegun (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover.
- Ackleh, A., B. Fitzpatrick und T. Hallam (1984). Approximation and parameter estimation problems for algal aggregation models. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 4, 291–311.
- Al-Naimi, R. und C. P. R. Saunders (1985). Measurements of natural deposition and condensation-freezing ice nuclei with a continuous flow chamber. *Atmos. Env.* 19, 1871–1882.
- Aldous, D. J. (1999). Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli* 5, 3–48.
- Allen, E. und P. Bastien (1995). On coagulation and the stellar mass function. *Astrophys. J.* 452, 652–670.
- auf der Maur, A. N. (2001). Statistical tools for drop size distributions: Moments and generalized gamma. *J. Atmos. Sci.* 58, 407–418.
- Baldauf, M. (2001). Das mesoskalige Simulationsmodell KAMM2. Unveröffentlichte Modelldokumentation, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Karlsruhe.
- Barklie, R. H. D. und N. R. Gokhale (1959). *Scientific Report, MW-30*. Montreal: Stormy Weather Group, McGill University.
- Bayer, D., K. D. Beheng und F. Herbert (1987). Numerische Modellierung von atmosphärischen Auswaschprozessen. Berichte des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt/Main, Frankfurt.
- Bayewitz, M. H., J. Yerushalmi, S. Katz und K. Shinnar (1974). The extent of correlations in a stochastic coalescence process. *J. Atmos. Sci.* 31, 1604–1614.
- Beard, K. V. (1976). Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft. *J. Atmos. Sci.* 33, 851–864.
- Beard, K. V. (1980). The effects of altitude and electrical force on the terminal velocity of hydrometeors. *J. Atmos. Sci.* 37, 1363–1374.
- Beard, K. V. und H. T. Ochs (1995). Collisions between small precipitation drops. Part II: Formulas for coalescence, temporary coalescence, and satellites. *J. Atmos. Sci.* 52, 3977–3996.

- Beard, K. V. und H. R. Pruppacher (1971). A wind tunnel investigation of the rate of evaporation of small water drops falling at terminal velocity in air. *J. Atmos. Sci.* 28, 1455–1464.
- Beheng, K. D. (1976). *Numerische Simulation der Graupelbildung*. Dissertation, Universität Köln, Köln.
- Beheng, K. D. (1978). Numerical simulation of graupel development. *J. Atmos. Sci.* 35, 683–689.
- Beheng, K. D. (1981). Stochastic riming of plate-like and columnar ice crystals. *Pure Appl. Geophys.* 119, 820–830.
- Beheng, K. D. (1994). A parameterization of warm cloud microphysical conversion processes. *Atmos. Res.* 33, 193–206.
- Beheng, K. D. und G. Doms (1986). A general formulation of collection rates of cloud and raindrops using the kinetic equation and comparison with parameterizations. *Contrib. Atmos. Phys.* 59, 66–84.
- Beheng, K. D. und G. Doms (1990). The time evolution of a drop spectrum due to collision/coalescence: A numerical case study on the effects of selfcollection, autoconversion and accretion. *Meteor. Rdsch.* 42, 52–61.
- Beheng, K. D. und U. Wacker (1993). Über die Mikrostruktur von Wolken. *Promet* 23, 10–25.
- Berry, E. X. (1968). Modification of the warm rain process. In *Proc. First Natl. Conf. Wea. Modification*, Boston, 81–85. Amer. Meteor. Soc.
- Berry, E. X. und M. R. Pranger (1974). Equations for calculating the terminal velocities of water drops. *J. Appl. Met.* 13, 108–113.
- Berry, E. X. und R. L. Reinhardt (1974a). An analysis of cloud drop growth by collection: Part I. Double distributions. *J. Atmos. Sci.* 31, 1814–1824.
- Berry, E. X. und R. L. Reinhardt (1974b). An analysis of cloud drop growth by collection: Part II. Single initial distributions. *J. Atmos. Sci.* 31, 1825–1831.
- Bigg, E. K. (1953). The formation of atmospheric ice crystals by the freezing of droplets. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 79, 510–519.
- Blackadar, A. K. und H. Tennekes (1968). Asymptotic similarity in neutral barotropic planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.* 25, 1015–1020.
- Bleck, R. (1970). A fast approximative method for integrating the stochastic coalescence equation. *J. Geophys. Res.* 75, 5165–5171.
- Bluestein, H. B. (1992). *Synoptic-dynamic meteorology in midlatitudes: Observations and Theory of Weather Systems Vol. 2*. New York: Oxford University Press.
- Bluestein, H. B. (1999). *Tornado Alley*. New York: Oxford University Press.

- Böhm, J. P. (1989). A general equation for the terminal fall speed of solid hydrometeors. *J. Atmos. Sci.* 46, 2419–2427.
- Böhm, J. P. (1990). *On the Hydrodynamics of Cloud and Precipitation Particles*. Dissertation, Eidgen. Techn. Hochschule, Zürich.
- Bollobas, B. (1985). *Random Graphs*. London: Academic Press.
- Boris, J. und D. Book (1973). Flux corrected transport I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.* 11, 38–69.
- Bronstein, I. und K. A. Semendjajew (1991). *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Brown, P. S. (1983). Some essential details of Bleck's method to the collision-breakup equation. *J. Clim. Appl. Met.* 22, 693–697.
- Brown, P. S. (1986). Analysis of the Low and List drop-breakup formulation. *J. Clim. Appl. Met.* 25, 313–321.
- Browning, K. A. (1964). Airflow and precipitation trajectories within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.* 21, 634–639.
- Browning, K. A. (1977). *The structure and mechanism of hailstorms*. Meteor. Monogr., 16., Amer. Meteor. Soc.
- Bruintjes, R. T., A. J. Heymsfield und T. W. Krauss (1987). An examination of double-plate ice crystals and the initiation of precipitation in continental cumulus clouds. *J. Atmos. Sci.* 44, 1331–1350.
- Byers, H. R. und R. R. Braham (1949). *The Thunderstorm*. Washington D.C.: U.S. Government Printing Office.
- Carpenter, R. L., K. K. Droegemeier und A. M. Blyth (1998). Entrainment and detrainment in numerically simulated cumulus congestus clouds. *J. Atmos. Sci.* 55, 3417–3432.
- Chen, J.-P. (1993). Predictions of saturation ratio for cloud microphysical models. *J. Atmos. Sci.* 51, 1332–1338.
- Chu, C.-M. und Y.-L. Lin (2000). Effects of orography and the generation and propagation of mesoscale convective systems in a two-dimensional conditionally unstable flow. *J. Atmos. Sci.* 57, 3817–3837.
- Clark, T. L. (1974). A study in cloud phase parameterization using the gamma distribution. *J. Atmos. Sci.* 31, 142–155.
- Cohard, J.-M. und J.-P. Pinty (2000a). A comprehensive two-moment warm microphysical bulk scheme. I: Description and tests. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 126, 1815–1842.

- Cohard, J.-M. und J.-P. Pinty (2000b). A comprehensive two-moment warm microphysical bulk scheme. II: 2D experiments with a non-hydrostatic model. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 126, 1843–1859.
- Cohard, J.-M., J.-P. Pinty und C. Bedos (1998). Extending Twomey's analytical estimate of nucleated cloud droplet concentrations from CCN spectra. *J. Atmos. Sci.* 55, 3348–3357.
- Cohard, J.-M., J.-P. Pinty und K. Suhre (2000). On the parameterization of activation spectra from cloud condensation nuclei microphysical properties. *J. Geophys. Res.* 105, 11753–11766.
- Considine, G. und J. A. Curry (1996). A statistical model of drop-size spectra for stratocumulus clouds. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 122, 611–634.
- Cooper, W. A. (1980). A method of detecting contact ice nuclei using filter samples. In *Proc. 8th Int. Conf. Clouds and Precip.*, Clermont-Ferrand, France, 665–668.
- Cotton, R. J. und P. R. Field (2001). Ice nucleation characteristics of an isolated wave cloud. *Eingereicht bei Quart. J. Roy. Met. Soc.*
- Cotton, W. R. und R. A. Anthes (1989). *Storm and cloud dynamics*. San Diego: Academic Press.
- Cotton, W. R., M. A. Stephens, T. Nehr Korn und G. J. Tripoli (1982). The Colorado State University threedimensional cloud/mesoscale model - 1982. Part II: An ice-phase parameterization. *J. Rech. Atmos.* 16, 295–320.
- Cotton, W. R., G. J. Tripoli, R. M. Rauber und E. A. Mulvihill (1986). Numerical simulation of the effects of varying ice crystal nucleation rates and aggregation processes on orographic snowfall. *J. Clim. Appl. Met.* 25, 1658–1680.
- da Costa, F. P. (1996). On the dynamic scaling behaviour of solutions to the discrete Smoluchowski equation. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 39, 547–559.
- Davies-Jones, R. P. (1984). Streamwise vorticity: The origin of updraft rotation in supercell storms. *J. Atmos. Sci.* 41, 2991–3006.
- Deshler, T. (1982). *Contact ice nucleation by submicron atmospheric aerosols*. Dissertation, Dept. of Atmospheric Science, Univ. of Wyoming, Laramie.
- Doms, G. und K. D. Beheng (1986). Mathematical formulation of self-collection, autoconversion and accretion rates of cloud and raindrops. *Meteor. Rdsch.* 39, 98–102.
- Doms, G. und F. Herbert (1985). *Fluid- und Mikrodynamik in numerischen Modellen konvektiver Wolken*. Berichte des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt/Main Nr. 62.
- Dotzek, N. (1999). *Mesoskalige numerische Simulation von Wolken- und Niederschlagsprozessen über strukturiertem Gelände*. Dissertation, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Universität Karlsruhe / Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe.

- Drake, R. (1972). A general mathematical survey of the coagulation equation. In G. Hidy und J. Brock (Eds.), *Topics in current aerosol research*, 201–376. Oxford: Pergamon Press.
- Effinger, H. und S. Grossmann (1987). Static structure function of turbulent flow from the Navier-Stokes equation. *Z. Phys. B* 49, 289–304.
- Emanuel, K. A. (1994). *Atmospheric Convection*. New York: Oxford University Press.
- Ernst, M. (1983). Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation and related equations. In J. Lebowitz und E. Montroll (Eds.), *Nonequilibrium Phenomena I*, 51–119. Amsterdam: North-Holland.
- Ernst, M. H. (1985). Kinetic theory of clustering. In E. Cohen (Ed.), *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VI*, 329–364. Elsevier.
- Federer, B. und A. Waldvogel (1975). Hail and raindrop size distributions from a swiss multicell storm. *J. Appl. Met.* 14, 91–97.
- Ferrier, B. S. (1994). A double-moment multiple-phase four-class bulk ice scheme. Part I: Description. *J. Atmos. Sci.* 51, 249–280.
- Ferrier, B. S., W.-K. Tao und J. Simpson (1994). A double-moment multiple-phase four-class bulk ice scheme. Part II: Simulation of convective storms in different large-scale environments and comparison with other bulk parameterizations. *J. Atmos. Sci.* 51, 249–280.
- Field, P. R., R. J. Cotton, K. Noone, P. H. Kaye, E. Hirst, R. S. Greenaway, C. Jost, R. Gabriel, R. Reiner, M. Andreae, C. P. R. Saunders, A. Archer, T. Choulaton, M. Smith, B. Brooks, C. Hoell, B. Bandy, D. Johnson und A. Heymsfield (2001). Ice nucleation in orographic wave clouds: Measurements made during INTACC. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 127, 1493–1512.
- Flatau, P. J., G. J. Tripoli, J. Verlinde und W. R. Cotton (1989). *The CSU-RAMS Cloud Microphysics Module: General Theory and Code Documentation*. Department of Atmospheric Sciences, Colorado State University.
- Fletcher, N. H. (1962). *Physics of Rain Clouds*. Cambridge University Press.
- Fortak, H. (1982). *Meteorologie*. Berlin: Reimer Verlag.
- Geresdi, I. (1990). Two-dimensional simulation of a small hailstorm. *Idöjaras* 94, 346–360.
- Gillespie, D. T. (1972). The stochastic coalescence model for cloud droplet growth. *J. Atmos. Sci.* 29, 1496–1510.
- Gillespie, D. T. (1975). Three models for the coalescence growth of cloud drops. *J. Atmos. Sci.* 32, 600–607.
- Gillespie, J. R. und R. List (1978). Effects of collision-induced breakup on drop size distributions in steady state rainshafts. *Pure Appl. Geophys.* 117, 599–626.

- Golovin, A. M. (1963). The solution of the coagulation equation for cloud droplets in a rising air-current. *Bull. Acad. Sci. USSR, Geophys.* 5, 482–487.
- Grossmann, S. (1990). Turbulenz: Verstehen wir endlich dieses nichtlineare Phänomen? *Phys. Bl.* 46, 2–7.
- Gunn, K. und J. Marshall (1957). The distribution with size of aggregate snowflakes. *J. Meteor.* 15, 452–461.
- Haddad, Z. S., S. L. Durden und E. Im (1996). Parameterizing the raindrop size distribution. *J. Appl. Met.* 35, 3–13.
- Hall, W. D. (1980). A detailed microphysical model within a two-dimensional dynamical framework: Model description and preliminary results. *J. Atmos. Sci.* 37, 2486–2507.
- Hall, W. D. und H. R. Pruppacher (1976). The survival of ice particles falling from cirrus clouds in subsaturated air. *J. Atmos. Sci.* 33, 1995–2006.
- Hallett, J. und S. C. Mossop (1974). Production of secondary ice crystals during the riming process. *Nature* 249, 26–28.
- Hallgren, R. E. und C. L. Hosler (1960). Preliminary results on the aggregation of ice crystals. *Geophys. Monogr.* 5, 257–263.
- Hannesen, R. (1998). *Analyse konvektiver Niederschlagssysteme mit einem C-Band Dopplerradar in orographisch gegliedertem Gelände*. Dissertation, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Universität Karlsruhe / Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe.
- Hannesen, R., N. Dotzek, H. Gysi und K. D. Beheng (1998). Case study of a tornado in the upper rhine valley. *Meteorol. Zeitschr.* 7, 163–170.
- Harrington, J. Y., M. P. Meyers, R. L. Walko und W. R. Cotton (1995). Parameterization of ice crystal conversion processes due to vapor deposition for mesoscale models using double-moment basis functions. Part I: Basic formulation and parcel model results. *J. Atmos. Sci.* 52, 4344–4366.
- Hendriks, E. M., M. H. Ernst und R. M. Ziff (1983). Coagulation equations with gelation. *J. Stat. Phys.* 31, 519–582.
- Herbert, F. (1973a). Irreversible Prozesse in der Atmosphäre - 1. Teil. *Contrib. Atmos. Phys.* 46, 119–136.
- Herbert, F. (1973b). Irreversible Prozesse in der Atmosphäre - 2. Teil. *Contrib. Atmos. Phys.* 46, 262–288.
- Herbert, F. und U. Wacker (1998). Parameterization of the CCN-humidity spectrum in dependency of nucleation conditions and aerosol size distribution. *Meteorol. Atmos. Phys.* 68, 213–220.

- Heymsfield, A. J. und M. Kajikawa (1987). An improved approach to calculating terminal velocities of plate-like crystals and graupel. *J. Atmos. Sci.* 44, 1088–1099.
- Hobbs, P. V., D. A. Bowdle und L. F. Radke (1985). Particles in the lower troposphere over the high plains of the united states. Part II: Cloud condensation nuclei. *J. Clim. Appl. Met.* 24, 1358–1369.
- Höllner, H. (1984). A parameterization scheme of cloud microphysical processes. In *Proc. 9th Int. Conf. Clouds and Precip.*, Tallinn, 501–504.
- Hosler, C. L. (1957). On the aggregation of ice crystals to form snow. *J. Meteor.* 14, 415–420.
- Hosler, C. L. und R. E. Hallgren (1961). Ice crystal aggregation. *Nubila* 4, 13–19.
- Houze, R. A. (1993). *Cloud Dynamics*. San Diego: Academic Press.
- Houze, R. A., W. Schmid, R. G. Fovell und H.-H. Schiesser (1993). Hailstorms in Switzerland: Left movers, right movers, and false hooks. *Mon. Wea. Rev.* 121, 3345–3370.
- Hu, Z., R. T. Bruintjes und E. A. Betterton (1998). Sensitivity of cloud droplet growth to collision and coalescence efficiencies in a parcel model. *J. Atmos. Sci.* 55, 2502–2515.
- Hu, Z. und R. C. Srivastava (1995). Evolution of raindrop size distribution by coalescence, breakup, and evaporation: Theory and observations. *J. Atmos. Sci.* 52, 1761–1783.
- Hudson, J. G. und H. Li (1995). Microphysical contrasts in Atlantic stratus. *J. Atmos. Sci.* 52, 3031–3040.
- Hudson, J. G. und Y. Xie (1999). Vertical distributions of cloud condensation nuclei spectra over the summertime northeast Pacific and Atlantic Oceans. *J. Geophys. Res.* 104, 30219–30229.
- Jeffrey, C. A. und P. H. Austin (1997). Homogenous nucleation of supercooled water: Results from a new equation of state. *J. Geophys. Res.* 102, 25269–25279.
- Ji, Q. und G. E. Shaw (1998). On supersaturation spectrum and size distributions of cloud condensation nuclei. *Geophys. Res. Lett.* 25, 1903–1906.
- Johnson, D. E., P. K. Wang und J. M. Straka (1993). Numerical simulation of the 2 august 1981 CCOPE supercell storm with and without ice microphysics. *J. Appl. Met.* 32, 745–759.
- Jonas, P. R. (1996). Turbulence and cloud microphysics. *Atmos. Res.* 40, 283–306.
- Kessler, E. (1969). *On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations*. Meteor. Monogr. 32. Boston: Amer. Meteor. Soc.
- Khain, A., M. Ovtchinnikov, M. Pinsky, A. Pokrovsky und H. Krugliak (2000). Notes on the state-of-the-art numerical modeling of cloud microphysics. *Atmos. Res.* 55, 159–224.
- Khain, A., M. Pinsky, M. Shapiro und A. Pokrovsky (2001). Collision rate of small graupel and water drops. *J. Atmos. Sci.* 58, 2571–2595.

- Khain, A., A. Pokrovsky und I. Sednev (1999). Some effects of cloud-aerosol interaction on cloud microphysics structure and precipitation formation: Numerical experiments with a spectral microphysics cloud ensemble model. *Atmos. Res.* 52, 195–220.
- Khain, A. P., D. Rosenfeld und A. Pokrovsky (2001). Simulating convective clouds with sustained supercooled liquid water down to -37.5 °C using a spectral microphysics model. *Geophys. Res. Lett.* 28, 3887–3890.
- Khain, A. P. und I. L. Sednev (1995). Simulation of hydrometeor size spectra evolution by water-water, ice-water and ice-ice interactions. *Atmos. Res.* 36, 107–138.
- Khain, A. P. und I. L. Sednev (1996). Simulation of precipitation formation in the eastern mediterranean coastal zone using a spectral microphysics cloud ensemble model. *Atmos. Res.* 43, 77–110.
- Khairoutdinov, M. und Y. Kogan (2000). A new cloud physics parameterization in a large-eddy simulation model of marine stratocumulus. *Mon. Wea. Rev.* 128, 229–243.
- Klemp, J. B. (1987). Dynamics of tornadic thunderstorms. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 19, 369–402.
- Klemp, J. B. und R. B. Wilhelmson (1978). The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.* 35, 1070–1096.
- Klemp, J. B., R. B. Wilhelmson und P. S. Ray (1981). Observed and numerically simulated structure of a mature supercell thunderstorm. *J. Atmos. Sci.* 38, 1558–1580.
- Klett, J. D. und M. H. Davis (1973). Theoretical collision efficiencies of cloud droplets at small Reynolds numbers. *J. Atmos. Sci.* 30, 107–117.
- Kogan, Y. L. und W. J. Martin (1994). Parameterization of bulk condensation in numerical cloud models. *J. Atmos. Sci.* 51, 1728–1739.
- Laube, M. und H. Höller (1990). Cloud physics. In O. Madelung (Ed.), *Landolt-Börnstein / Numerical data and functional relationships in science and technology*. Springer.
- Lemon, L. R. und C. A. Doswell (1979). Severe thunderstorm evolution and mesocyclone structure as related to tornadogenesis. *Mon. Wea. Rev.* 107, 1184–1197.
- Lew, J. K., D. E. Kingsmill und D. C. Montague (1985). A theoretical study of the collision efficiency of small planar ice crystals colliding with large supercooled water drops. *J. Atmos. Sci.* 42, 857–862.
- Lew, J. K. und H. R. Pruppacher (1983). A theoretical determination of the capture efficiency of small columnar ice crystals by large cloud drops. *J. Atmos. Sci.* 40, 139–145.
- Lilly, D. K. (1986a). The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part I: Energy exchange with the mean flow. *J. Atmos. Sci.* 43, 113–125.

- Lilly, D. K. (1986b). The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization. *J. Atmos. Sci.* 43, 126–140.
- Lin, Y.-L., R. D. Farley und H. Orville (1983). Bulk parameterization of the snow field in a cloud model. *J. Clim. Appl. Meteorol.* 22, 1065–1092.
- List, R. (1988). A linear radar reflectivity-rainrate relationship for steady tropical rain. *J. Atmos. Sci.* 45, 3564–3572.
- List, R., N. R. Donaldson und R. E. Stewart (1987). Temporal evolution of drop spectra to collisional equilibrium in a steady and pulsating rain. *J. Atmos. Sci.* 44, 362–372.
- List, R. und J. R. Gillespie (1976). Evolution of raindrop spectra with collision-induced breakup. *J. Atmos. Sci.* 33, 2007–2013.
- Liu, J. Y. und H. D. Orville (1969). Numerical modeling of precipitation and cloud shadow effects on mountain induced cumuli. *J. Atmos. Sci.* 26, 1283–1298.
- Locatelli, J. D. und P. V. Hobbs (1974). Fall speeds and masses of solid precipitation particles. *J. Geophys. Res.* 79, 2185–2197.
- Long, A. B. (1974). Solutions to the droplet collection equation for polynomial kernels. *J. Atmos. Sci.* 31, 1040–1052.
- Low, T. B. und R. List (1982a). Collision, coalescence and breakup of raindrops, Part I: Experimentally established coalescence efficiencies and fragment size distributions in breakup. *J. Atmos. Sci.* 39, 1591–1606.
- Low, T. B. und R. List (1982b). Collision, coalescence and breakup of raindrops, Part II: Parameterization of fragment size distributions. *J. Atmos. Sci.* 39, 1607–1618.
- Lüpkes, C. (1991). *Untersuchungen zur Parametrisierung von Koagulationsprozessen niederschlagsbildender Tropfen*. Hamburg: Kovac.
- Lüpkes, C., K. D. Beheng und G. Doms (1989). A parameterization scheme for simulating collision/coalescence of water drops. *Contrib. Atmos. Phys.* 62, 289–306.
- Magono, C. und C. W. Lee (1966). Meteorological classification of natural snow crystals. *J. Fac. Sci.* 2, 320–335.
- Maier, G. (2001). Die aufs Wetter wetten. *Die Zeit* 43.
- Markowski, P. M. (2002). Hook echoes and rear-flank downdrafts: A review. *Mon. Wea. Rev.* 130, 852–874.
- Marshall, J. S. und K. L. S. Gunn (1952). Measurement of snow parameters by radar. *J. Meteor.* 9, 322–327.
- Marshall, J. S. und W. M. K. Palmer (1948). The distribution of raindrops with size. *J. Meteor.* 5, 165–166.

- Marwitz, J. D. (1972a). The structure and motion of severe hailstorms: Part I: Supercell storms. *J. Appl. Met.* 11, 166–179.
- Marwitz, J. D. (1972b). The structure and motion of severe hailstorms: Part II: Multicell storms. *J. Appl. Met.* 11, 180–188.
- Marwitz, J. D. (1972c). The structure and motion of severe hailstorms: Part III: Severely sheared storms. *J. Appl. Met.* 11, 189–201.
- Mayer, F. (2000). Numerische Simulation des Zerfallsprozesses von Regentropfen. Diplomarbeit, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Universität Karlsruhe / Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe.
- McCaul, E. W. und M. L. Weisman (2001). The sensitivity of simulated supercell structure and intensity to variations in the shapes of environmental buoyancy and shear profiles. *Mon. Wea. Rev.* 129, 664–687.
- Meyers, M. P., P. J. DeMott und W. R. Cotton (1992). New primary ice-nucleation parameterizations in an explicit cloud model. *J. Appl. Met.* 31, 708–721.
- Meyers, M. P., R. L. Walko, J. Y. Harrington und W. R. Cotton (1997). New RAMS cloud microphysics parameterization. Part II: The two-moment scheme. *Atmos. Res.* 45, 3–39.
- Mizuno, H. (1990). Parameterization of the accretion process between different precipitation elements. *J. Met. Soc. Jap.* 68, 395–398.
- Moncrieff, M. W. und J. S. A. Green (1972). The propagation and transfer properties of steady convection in constant vertical shear. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 98, 336–352.
- Montgomery, D. N. (1971). Collision and coalescence of water drops. *J. Atmos. Sci.* 28, 291–293.
- Müller, H. (1928). Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beihefte* 27, 223–250.
- Murakami, M. (1990). Numerical modeling of dynamical and microphysical evolution of an isolated convective cloud - The 19 July 1981 CCOPE cloud. *J. Met. Soc. Jap.* 68, 107–128.
- Musil, D. J., S. A. Christopher, R. A. Deola und P. L. Smith (1991). Some interior observations of southeastern montana hailstorms. *J. Appl. Met.* 30, 1596–1611.
- Ovtchinnikov, M. und Y. L. Kogan (2000). An investigation of ice production mechanisms in small cumuliform clouds using a 3d model with explicit microphysics. Part I: Model description. *J. Atmos. Sci.* 57, 2989–3003.
- Ovtchinnikov, M., Y. L. Kogan und A. M. Blyth (2000). An investigation of ice production mechanisms in small cumuliform clouds using a 3d model with explicit microphysics. Part II: Case study of new mexico cumulus clouds. *J. Atmos. Sci.* 57, 3004–3020.

- Passarelli, R. E. (1978). Theoretical and observational study of snow size spectra and snowflake aggregation efficiencies. *J. Atmos. Sci.* 35, 882–889.
- Pinsky, M. und A. Khain (1998). Some effects of cloud turbulence on water-ice and ice-ice collisions. *Atmos. Res.* 47-48, 69–86.
- Pinsky, M. und A. Khain (2002). Effects of in-cloud nucleation and turbulence on droplet spectrum formation in cumulus clouds. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 128, 501–533.
- Pinsky, M., A. Khain, D. Rosenfeld und A. Pokrovsky (1998). Comparison of collision velocity differences of drops and graupel particles in a very turbulent cloud. *Atmos. Res.* 49, 99–113.
- Pinsky, M., A. Khain und M. Shapiro (2000). Stochastic effects of cloud droplet hydrodynamic interaction in a turbulent flow. *Atmos. Res.* 53, 131–169.
- Pinsky, M., A. Khain und M. Shapiro (2001). Collision efficiency of drops in a wide range of Reynolds numbers: Effect of pressure on spectrum evolution. *J. Atmos. Sci.* 58, 742–764.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pruppacher, H. R. und J. D. Klett (1997). *Microphysics of Clouds and Precipitation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Pruppacher, H. R. und R. Rasmussen (1979). A wind tunnel investigation of the rate of evaporation of large water drops falling at terminal velocity in air. *J. Atmos. Sci.* 36, 1255–1260.
- Reinecke, J. und K. D. Beheng (1996). A note on the integral condensation rate. *Meteorol. Zeitschr.* 5, 283–292.
- Reinking, R. F. (1979). The onset of early growth of snow crystals by accretion of droplets. *J. Atmos. Sci.* 36, 870–881.
- Reisner, J., R. M. Rasmussen und R. T. Bruintjes (1998). Explicit forecasting of supercooled liquid water in winter storms using the MM5 mesoscale model. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 124, 1071–1107.
- Roe, P. und M. Baines (1982). Algorithms for advection and shock problems. In H. Viviand (Ed.), *Proc. of the 4th GAMM conference on numerical methods in fluid mechanics*, Braunschweig. Vieweg.
- Rogers, D. C. (1982). *Field and laboratory studies of ice nucleation in winter orographic clouds*. Dissertation, Dept. of Atmospheric Science, Univ. of Wyoming, Laramie.
- Rogers, R. R., D. Baumgardner, S. A. Ethier, D. A. Carter und W. L. Ecklund (1993). Comparison of raindrop size distributions measured by radar wind profiler and by airplane. *J. Appl. Met.* 32, 694–699.

- Rosenfeld, D. und W. L. Woodley (2000). Deep convective clouds with sustained supercooled liquid water down to $-37.5\text{ }^{\circ}\text{C}$. *Nature* 405, 440–442.
- Rotunno, R. (1981). On the evolution of thunderstorm rotation. *Mon. Wea. Rev.* 109, 577–586.
- Rotunno, R. und J. B. Klemp (1982). The influence of the shear-induced pressure gradient on thunderstorm motion. *Mon. Wea. Rev.* 110, 136–151.
- Rotunno, R. und J. B. Klemp (1985). On the rotation and propagation of simulated supercell thunderstorms. *J. Atmos. Sci.* 42, 271–292.
- Rotunno, R., J. B. Klemp und M. L. Weisman (1988). A theory for strong, long-lived squall lines. *J. Atmos. Sci.* 45, 463–485.
- Rutledge, S. A. und P. V. Hobbs (1984). The mesoscale and microscale structure and organization of clouds and precipitation in midlatitude cyclones XII: A diagnostic modeling study of precipitation development in narrow cold-frontal rainbands. *J. Atmos. Sci.* 41, 2949–2972.
- Schlesinger, R. E. (1975). A three-dimensional model of an isolated deep convective cloud: Preliminary results. *J. Atmos. Sci.* 32, 934–957.
- Seifert, A. und K. D. Beheng (2000). An improved parameterization for simulating autoconversion, accretion and selfcollection based on a double-moment scheme. In *Proc. 13th Int. Conf. Clouds and Precip.*, Reno, Nevada, 493–496.
- Seifert, A. und K. D. Beheng (2001). A double-moment parameterization for simulating autoconversion, accretion and selfcollection. *Atmos. Res.* 59-60, 265–281.
- Seifert, A. und U. Wacker (2001). Entwicklung von Niederschlagsprofilen unter der Wirkung der Sedimentation. In *Proc. Deutsch-Österreichisch-Schweizerische Meteorologen-Tagung (DACH-MT)*, Wien, 18.-21.9.2001, Österreich.
- Silk, J. und T. Takahashi (1979). A statistical model for the initial stellar mass function. *Astrophys. J.* 229, 242–256.
- Silk, J. und S. D. White (1978). The development of structure in the expanding universe. *Astrophys. J.* 223, L59–L62.
- Smith, P. L. (1984). Equivalent radar reflectivity factors for snow and ice particles. *J. Clim. Appl. Met.* 23, 1258–1260.
- Soong, S.-T. und Y. Ogura (1973). A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.* 30, 879–893.
- Srivastava, R. (1988). On the scaling of equations governing the evolution of raindrop size distributions. *J. Atmos. Sci.* 45, 1091–1092.
- Stein, D. und H. W. Georgii (1982). *J. Hungarian Meteor. Soc.* 86, 124.

- Stein, D., H.-W. Georgii und U. Kamm (1985). Untersuchung der Konzentration der Wolkenkondensationskeime in Abhängigkeit von der Feuchte über dem Alpenvorland. *Meteor. Rdsch.* 38, 15–19.
- Stewart, C., C. Crowe und S. Saunders (1993). A model for simultaneous coalescence of bubble clusters. *Chem. Eng. Sci.* 48, 3347–3354.
- Straka, J. M. (1989). *Hail growth in a highly glaciated central plains multicellular storm*. Dissertation, Univ. of Wisconsin, Madison.
- Straka, J. M. und J. R. Anderson (1993). Numerical simulations of microburst-producing storms: Some results from storm observed during COHMEX. *J. Atmos. Sci.* 50, 1329–1348.
- Suzuki, E. (1964). Hyper gamma distribution and its fitting to rainfall data. *Pap. Meteor. Geophys.* 15, 31–51.
- Tavare, S. (1984). Line-of-descent and genealogical processes and their applications in population genetics models. *Theor. Population Biol.* 26, 119–164.
- Trizac, E. und J.-P. Hansen (1996). Dynamics and growth of particles undergoing ballistic coalescence. *J. Stat. Phys.* 82, 1345–1370.
- Tsias, A. (1996). *Einfluss des Aufplatzens von Tropfen auf das Wachstum von Regentropfen und auf die Umverteilung ihrer Inhaltsstoffe*. Dissertation, Universität Mainz, Mainz.
- Twomey, S. (1959). The nuclei of natural cloud formation. Part II: The supersaturation in natural clouds and the variation of cloud droplet concentration. *Geophys. Pure Appl.* 43, 243–249.
- Twomey, S. und T. A. Wojciechowski (1969). Observations of the geographical variation of cloud nuclei. *J. Atmos. Sci.* 26, 684–688.
- Ulbrich, C. W. (1983). Natural variations in the analytical form of the raindrop size distribution. *J. Clim. Appl. Met.* 22, 1764–1775.
- Vaillancourt, P. A. und M. K. Yau (2000). Review of particle-turbulence interactions and consequences for cloud physics. *Bull. Am. Met. Soc.* 81, 285–298.
- Valdez, M. P. und K. C. Young (1985). Number fluxes in equilibrium raindrop populations: A Markov chain analysis. *J. Atmos. Sci.* 42, 1024–1036.
- Vali, G. (1974). Contact ice nucleation by natural and artificial aerosols. In *Conf. Cloud Physics*, Tucson, 34–37. Amer. Meteor. Soc.
- Vali, G. (1976). Contact-freezing nucleation measured by the DFC instrument. In *Third Int. Workshop on Ice Nucleus Measurements*, Laramie. Univ. of Wyoming.
- Valioulis, I. A. und E. J. List (1984). A numerical evaluation of the stochastic completeness of the kinetic coagulation equation. *J. Atmos. Sci.* 41, 2516–2529.

- van Dongen, P. G. und M. H. Ernst (1988). Scaling solutions of Smoluchowski's coagulation equation. *J. Stat. Phys.* 50, 295–329.
- Verlinde, J. und W. R. Cotton (1993). Fitting microphysical observations of nonsteady convective clouds to a numerical model: An application of the adjoint technique of data assimilation to a kinematic model. *Mon. Wea. Rev.* 121, 2776–2793.
- Verlinde, J., P. J. Flatau und W. R. Cotton (1990). Analytical solutions to the collection growth equation: Comparison with approximate methods and application to cloud microphysics parameterization schemes. *J. Atmos. Sci.* 47, 2871–2880.
- Vohl, O., S. K. Mitra, S. C. Wurzler und H. R. Pruppacher (1999). A wind tunnel study of the effects of turbulence on the growth of cloud drops by collision and coalescence. *J. Atmos. Sci.* 56, 4088–4099.
- von der Emde, K. und U. Wacker (1993). Comments on the relationship between aerosol spectra, equilibrium drop size spectra, and CCN spectra. *Contrib. Atmos. Phys.* 66, 157–162.
- von Smoluchowski, M. (1916). Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Physik. Zeitschr.* 17, 557–599.
- von Smoluchowski, M. (1917). Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloidaler Lösungen. *Z. Phys. Chem.* 92, 129–168.
- Wacker, U. (1993). Diffusionswachstum von Wolkenpartikeln. *Promet* 23, 15–20.
- Wacker, U. (2000a). An analytical study on the evolution of the vertical profile of rain water concentration. *Geophys. Res. Lett.* 27, 1275–1278.
- Wacker, U. (2000b). Influence of the type of condensate particles on cloud physical quantities. *Phys. and Chem. of the Earth B* 25, 91–99.
- Wacker, U. und A. Seifert (2000). On shock-type-solutions for the precipitation concentration in models with parameterized microphysics. In *Proc. 13th Int. Conf. Clouds and Precip.*, Reno, Nevada, 580–583.
- Wacker, U. und A. Seifert (2001). Evolution of rain water profiles resulting from pure sedimentation: Spectral vs. parameterized description. *Atmos. Res.* 58, 19–39.
- Waldvogel, A. (1974). The n_0 -jump of raindrop spectra. *J. Atmos. Sci.* 31, 1067–1078.
- Walko, R. L., W. R. Cotton, M. P. Meyers und J. Y. Harrington (1995). New RAMS cloud microphysics parameterization. Part I: The single-moment scheme. *Atmos. Res.* 38, 29–62.
- Wang, P. K. und W. Ji (2000). Collision efficiencies of ice crystals at low-intermediate Reynolds numbers colliding with supercooled cloud droplets: A numerical study. *J. Atmos. Sci.* 57, 1001–1009.

- Weisman, M. L. und J. B. Klemp (1982). The dependency of numerically simulated convective storms on vertical wind shear and bouyancy. *Mon. Wea. Rev.* 110, 504–520.
- Weisman, M. L. und J. B. Klemp (1984). The structure and classification of numerically simulated convective storms in directionally varying wind shears. *Mon. Wea. Rev.* 112, 2479–2498.
- Weisman, M. L. und R. Rotunno (2000). The use of vertical wind shear versus helicity in interpreting supercell dynamics. *J. Atmos. Sci.* 57, 1452–1472.
- Weisman, M. L., W. C. Skamarock und J. B. Klemp (1997). The resolution dependence of explicitly modeled convective systems. *Mon. Wea. Rev.* 125, 527–548.
- Wetherill, G. (1990). Comparison of analytical and physical modeling of planetesimal accumulation. *Icarus* 88, 336–354.
- Wicker, L. J. und R. B. Wilhelmson (1995). Simulation and analysis of tornado development and decay within a three-dimensional supercell thunderstorm. *J. Atmos. Sci.* 52, 2675–2703.
- Wisner, C., H. D. Orville und C. Myers (1972). A numerical model of a hail-bearing cloud. *J. Atmos. Sci.* 29, 1160–1181.
- Xue, M., K. K. Droegemeier, V. Wong, A. Shapiro und K. Brewster (1995). *Advanced Regional Prediction System (ARPS) Version 4.0 User's Guide*. Oklahoma: Center for Analysis and Prediction of Storms.
- Young, K. (1974a). A numerical simulation of wintertime, orographic precipitation: Part I: Description of model microphysics and numerical techniques. *J. Atmos. Sci.* 31, 1735–1748.
- Young, K. C. (1974b). The role of contact nucleation in ice phase initiation of clouds. *J. Atmos. Sci.* 31, 768–776.
- Zawadzki, I. und M. A. de Agostinho (1988). Equilibrium raindrop size distributions in tropical rain. *J. Atmos. Sci.* 45, 3452–3459.
- Ziegler, C. L. (1985). Retrieval of thermal and microphysical variables in observed convective storms. Part I: Model development and preliminary testing. *J. Atmos. Sci.* 42, 1487–1509.

Symbolverzeichnis

Im folgenden sind wichtige Symbole, ihre Bedeutung und SI-Einheit aufgeführt. Bei Konstanten ist zusätzlich der Zahlenwert angegeben; bei Modellparametern, der für die Simulationen in Kapiteln 5 gewählte Wert. In Abschnitt 2.1 haben manche Symbole eine andere Bedeutung. In Kapitel 3 wird meist das CGS-System verwendet und dort sind viele Größen und Parameter im CGS-System angegeben. Da KAMM2 vollständig im SI-System programmiert ist, wird hier die Umrechnung dieser Modellparameter ins SI-System angegeben. Das CGS-System wird im Bereich der Wolkenphysik gern verwendet, da dann die Dichte von Wasser den Wert 1 g cm^{-3} annimmt.

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
∇	Nabla-Operator		m^{-1}
α	Koeffizient im Potenzansatz für das Fallgesetz		$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta}$
α_c	Koeffizient im Fallgesetz für Wolkentropfen	3.75×10^5	$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta_c}$
α_r	Koeffizient im Fallgesetz für Regentropfen	159.0	$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta_r}$
α_g	Koeffizient im Fallgesetz für Graupel	46.40	$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta_g}$
α_i	Koeffizient im Fallgesetz für Wolkeneis	317.0	$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta_i}$
α_s	Koeffizient im Fallgesetz für Schnee	27.70	$\text{m s}^{-1} \text{ kg}^{-\beta_s}$
α_o	Raumerfüllungskoeffizient	0.68	1
β	Exponent im Potenzansatz für das Fallgesetz		1
β_c	Exponent im Fallgesetz für Wolkentropfen	2/3	1
β_r	Exponent im Fallgesetz für Regentropfen	0.266	1
β_g	Exponent im Fallgesetz für Graupel	0.260	1
β_i	Exponent im Fallgesetz für Wolkeneis	0.362	1
β_s	Exponent im Fallgesetz für Schnee	0.220	1
δ	Diracsche Deltafunktion		1
δ_a^k	Koeffizient der verbesserten Wisner-Approximation		1
δ_{ab}^k	Koeffizient der verbesserten Wisner-Approximation		1
Δt	Zeitschritt		s
ΔT_b	maximale Temperaturdifferenz der Warmluftblase		K
$\Delta \bar{u}_s$	Geschwindigkeitsdifferenz der Windscherung		m s^{-1}
$\overline{\Delta v_{gr}}$	mittlere Fallgeschwindigkeitsdifferenz Graupel-Regentropfen		m s^{-1}
Δx	horizontale Gittermaschenweite		m
Δy	horizontale Gittermaschenweite		m
Δz	höhenabhängige vertikale Gittermaschenweite		m

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
$\overline{\Delta z}$	mittlere vertikale Gittermaschenweite		m
Δz_{min}	minimale vertikale Gittermaschenweite		m
ζ	Vorticity		s^{-1}
η_a	dynamische Viskosität von Luft		$N s m^{-2}$
ϑ_a^k	Koeffizient der verbesserten Wisner-Approximation		1
ϑ_{ab}^k	Koeffizient der verbesserten Wisner-Approximation		1
θ	potentielle Temperatur		K
θ_0	potentielle Temperatur am Boden		K
θ_v	virtuell potentielle Temperatur		K
$\theta_{v,p}$	virtuell potentielle Temperatur eines Luftpakets		K
θ_{tr}	potentielle Temperatur der Tropopause		K
Γ	Gammafunktion		1
λ	Exponent der verallgemeinerten Gamma-Verteilung		$kg^{-\mu}$
λ_r	Exponent der Verteilungsfunktion für Regentropfen		$kg^{-\mu_r}$
μ	Exponent der verallgemeinerten Gamma-Verteilung		1
μ_c	Exponent der Verteilungsfunktion für Wolkentropfen	1	1
μ_r	Exponent der Verteilungsfunktion für Regentropfen	1/3	1
μ_g	Exponent der Verteilungsfunktion für Graupel	1/3	1
μ_i	Exponent der Verteilungsfunktion für Wolkeneis	1	1
μ_s	Exponent der Verteilungsfunktion für Schnee	1/3	1
ν	Exponent der verallgemeinerten Gamma-Verteilung		1
ν_c	Exponent der Verteilungsfunktion für Wolkentropfen	0	1
ν_r	Exponent der Verteilungsfunktion für Regentropfen	-2/3	1
ν_g	Exponent der Verteilungsfunktion für Graupel	1	1
ν_i	Exponent der Verteilungsfunktion für Wolkeneis	0	1
ν_s	Exponent der Verteilungsfunktion für Schnee	1	1
ν_a	kinematische Viskosität von Luft	1.4086×10^{-5}	$m^2 s^{-1}$
κ_{rr}	Exponent der approximierten Koagulationsfunktion		$kg^{-1/3}$
ρ	Dichte des Gesamtsystems		$kg m^{-3}$
ρ_0	Dichte des Grundzustands		$kg m^{-3}$
ρ_a	Dichte trockener Luft		$kg m^{-3}$
ρ_d	Wasserdampfpartialdichte		$kg m^{-3}$
ρ_w	Partialdichte des Flüssigwassers		$kg m^{-3}$
ρ_e	Partialdichte von Eis		$kg m^{-3}$
ρ_w	Materialdichte von Flüssigwasser	1000	$kg m^{-3}$
ρ_e	Materialdichte von Eis	900	$kg m^{-3}$
σ_w	Quellterm		$m^{-3} kg^{-1} s^{-1}$
σ_{break}	Quellterm durch Breakup		$m^{-3} kg^{-1} s^{-1}$
σ_{koag}	Quellterm durch Koagulation		$m^{-3} kg^{-1} s^{-1}$

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
σ_e	Varianz der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion		m s^{-1}
σ_i	Varianz der Geschwindigkeitsverteilung für Wolkeneis	0.25	m s^{-1}
σ_e	Varianz der Geschwindigkeitsverteilung für Schnee	0.25	m s^{-1}
σ_w	Oberflächenspannung von Wasser	7.1×10^{-2}	N m^{-1}
τ	dimensionslose Zeitskala der Koagulation		1
τ_{conv}	charakteristische Zeit der Konversion Eis-Graupel		s
Φ_{au}	universelle Funktion der Autokonversionsrate		1
Φ_{au}	universelle Funktion der Autokonversionsrate		1
Φ_{br}	dimensionslose Funktion der Breakup-Parametrisierung		1
Ω	Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation		s^{-1}
a	Koeffizient im Potenzansatz der Partikelgeometrie		m kg^{-b}
a_c	Geometriekoeffizient für Wolkentropfen	0.124	m kg^{-b_c}
a_r	Geometriekoeffizient für Regentropfen	0.124	m kg^{-b_r}
a_g	Geometriekoeffizient für Graupel	0.190	m kg^{-b_g}
a_i	Geometriekoeffizient für Wolkeneis	0.217	m kg^{-b_i}
a_s	Geometriekoeffizient für Schnee	8.156	m kg^{-b_s}
a_{dl}	$R_d/R_l - 1$	0.60777	1
a_v	Koeffizient in der Parametrisierung des Ventilationskoeff.		1
$a_{v,r}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Regentropfen	0.78	1
$a_{v,g}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Graupel	0.78	1
$a_{v,i}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Wolkeneis	0.86	1
$a_{v,s}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Schnee	0.78	1
$\bar{a}_{vent,n}$	Koeff. des mittleren Ventilationskoeff. für das n -te Moment		1
\mathbf{A}_d	turbulenter Fluss von Wasserdampf		$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$
\mathbf{A}_e	turbulenter Fluss von Eis		$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$
\mathbf{A}_w	turbulenter Fluss von Flüssigwasser		$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$
\mathbf{A}_T	turbulenter Wärmefluss		T m s^{-1}
\mathfrak{A}	turbulenter Impulsflusstensor		$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
b	Exponent im Potenzansatz der Partikelgeometrie		1
b_c	Geometrieexponent für Wolkentropfen	1/3	1
b_r	Geometrieexponent für Regentropfen	1/3	1
b_g	Geometrieexponent für Graupel	1/3.21	1
b_i	Geometrieexponent für Wolkeneis	1/3.31	1
b_s	Geometrieexponent für Schnee	1/1.90	1
b_v	Koeffizient in der Parametrisierung des Ventilationskoeff.		1
$a_{v,r}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Regentropfen	0.308	1
$a_{v,g}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Graupel	0.308	1
$a_{v,i}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Wolkeneis	0.280	1
$a_{v,s}$	Koeffizient des Ventilationskoeffizienten für Schnee	0.308	1

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
$\bar{b}_{vent,n}$	Koeff. des mittleren Ventilationskoeff. für das n -te Moment		1
B	Breakupfunktion		$m^3 s^{-1}$
c_c	Koeffizient der Kapazität von Wolkentropfen	2	1
c_r	Koeffizient der Kapazität von Regentropfen	2	1
c_g	Koeffizient der Kapazität von Graupel	2	1
c_i	Koeffizient der Kapazität von Wolkeneis	π	1
c_s	Koeffizient der Kapazität von Schnee	2	1
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck	1005.70	$J kg^{-1} K^{-1}$
c_v	spezifische Wärme bei konstantem Volumen	718.66	$J kg^{-1} K^{-1}$
c_w	spezifische Wärme von Wasser	4.187×10^6	$J kg^{-1} K^{-1}$
c_μ	Koeffizient des Turbulenzmodells	0.55	1
c_ϵ	Koeffizient des Turbulenzmodells	0.088	1
CAPE	konvektiv verfügbare Energie		$J kg^{-1}$
D	Partikeldurchmesser		m
D_c	Durchmesser der Wolkentropfen		m
D_r	Durchmesser der Regentropfen		m
D_g	Durchmesser der Graupelpartikel		m
D_i	Durchmesser der Wolkeneispartikel		m
D_s	Durchmesser der Schneeflocken		m
\bar{D}	mittlerer Partikeldurchmesser		m
\bar{D}_c	mittlerer Durchmesser der Wolkentropfen		m
\bar{D}_r	mittlerer Durchmesser der Regentropfen		m
\bar{D}_g	mittlerer Durchmesser der Graupelpartikel		m
\bar{D}_i	mittlerer Durchmesser der Wolkeneispartikel		m
\bar{D}_s	mittlerer Durchmesser der Schneeflocken		m
$\bar{D}_{c,0}$	Schwellenwert der Kollisionseffizienz von Wolkentropfen	15×10^{-6}	m
$\bar{D}_{c,1}$	Schwellenwert der Kollisionseffizienz von Wolkentropfen	30×10^{-6}	m
$\bar{D}_{g,0}$	Schwellenwert der Kollisionseffizienz von Graupel	150×10^{-6}	m
$\bar{D}_{i,0}$	Schwellenwert der Kollisionseffizienz von Wolkeneis	150×10^{-6}	m
$\bar{D}_{s,0}$	Schwellenwert der Kollisionseffizienz von Schnee	150×10^{-6}	m
\bar{D}_{eq}	Durchmesser im Koagulations-Breakup-Gleichgewicht	0.9×10^{-3}	m
\bar{D}_b	Koeffizient nach Verlinde und Cotton (1993)	6.0×10^{-4}	m
D_v	Diffusivität von Wasserdampf	3.0×10^{-5}	$m^2 s^{-1}$
D_T	Diffusivität von Wärme		$m^2 s^{-1}$
E	Aggregationseffizienz		1
E_{break}	Breakupeffizienz		1
E_{koag}	Koagulationseffizienz		1
E_{koal}	Koaleszenzeffizienz		1
E_{koll}	Kollisionseffizienz		1

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
E_{stick}	mittlere Anhafteffizienz		1
E_T	turbulente kinetische Energie		$m^2 s^{-2}$
$\bar{E}_{g,max}$	maximale mittlere Kollisonseffizienz Graupel-Wolkentropfen	1.0	1
$\bar{E}_{i,max}$	maximale mittlere Kollisonseffizienz Schnee-Wolkentropfen	0.8	1
$\bar{E}_{s,max}$	maximale mittlere Kollisonseffizienz Eis-Wolkentropfen	0.8	1
\mathcal{E}	Einheitstensor		1
f	Anzahldichteverteilungsfunktion		$m^{-3} kg^{-1}$
f_w	Anzahldichteverteilungsfunktion für Tropfen		$m^{-3} kg^{-1}$
f_c	Anzahldichteverteilungsfunktion für Wolkentropfen		$m^{-3} kg^{-1}$
f_r	Anzahldichteverteilungsfunktion für Regentropfen		$m^{-3} kg^{-1}$
f_g	Anzahldichteverteilungsfunktion für Graupel		$m^{-3} kg^{-1}$
f_i	Anzahldichteverteilungsfunktion für Eispartikel		$m^{-3} kg^{-1}$
f_h	Ventilationskoeffizient für Wärme		1
f_v	Ventilationskoeffizient für Wasserdampf		1
$\bar{f}_{v,n}$	mittlerer Ventilationskoeffizient für das n -te Moment		1
$F_{p,k}$	Sedimentationsfluss des k -ten-Moments		$kg^k m^{-3} s^{-1}$
F_{splint}	Temperaturabhängigkeit der Eismultiplikation		1
g	Schwerebeschleunigung	9.81	ms^{-2}
\mathbf{g}	Vektor der Schwerebeschleunigung		ms^{-2}
h	spezifische Enthalpie		$J kg^{-1}$
l	Phasenfluss		$kg m^{-3} s^{-1}$
\mathbf{l}	Diffusionsfluss		$kg m^{-2} s^{-1}$
\mathbf{l}^h	Wärmefluss		$J m^{-2} s^{-1}$
\mathfrak{J}	molekularer Impulsflusstensor		$J s^{-2} m^{-3}$
J_{het}	Temperaturabhängigkeit des heterogenen Gefrierens		$kg^{-1} s^{-1}$
J_{hom}	Temperaturabhängigkeit des homogenen Gefrierens		$kg^{-1} s^{-1}$
k_{br}	Koeffizient der Breakup-Parametrisierung	1.0×10^{-3}	m^{-1}
k_b	Koeffizient nach Verlinde und Cotton (1993)	2.3×10^3	m^{-1}
k_{KS}	Konstante in der Autokonversionsrate nach Kessler (1969)	10^{-3}	s^{-1}
k_c	Koeffizient nach Long (1974)	9.44×10^9	$m^3 kg^{-2} s^{-1}$
k_{cc}	Koeffizient der approximierten Koagulationsfunktion	4.44×10^9	$m^3 kg^{-2} s^{-1}$
$k_{cc,100}$	Koeffizient der approximierten turb. Koagulationsfunktion	10.58×10^9	$m^3 kg^{-2} s^{-1}$
k_{cr}	Koeffizient der approximierten Koagulationsfunktion	5.25	$m^3 kg^{-1} s^{-1}$
k_{rr}	Koeffizient der approximierten Koagulationsfunktion	7.12	$m^3 kg^{-1} s^{-1}$
k_r	Koeffizient nach Long (1974)	5.78	$m^3 kg^{-1} s^{-1}$
K	Koagulationsfunktion		$m^3 s^{-1}$
K_{ic}	Koagulationsfunktion Wolkeneis-Wolkentropfen		$m^3 s^{-1}$
K_{gc}	Koagulationsfunktion Graupel-Wolkentropfen		$m^3 s^{-1}$
K_{sc}	Koagulationsfunktion Schnee-Wolkentropfen		$m^3 s^{-1}$

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
K_{ww}	Koagulationsfunktion Tropfen-Tropfen		$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
K_ε	Dielektrizitätsfaktor von Eis	$\sqrt{0.176}$	1
K_w	Dielektrizitätsfaktor von Wasser	$\sqrt{0.930}$	1
K_m	turbulenter Diffusionskoeffizient für Impuls		$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
K_h	turbulenter Diffusionskoeffizient für Wärme		$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
K_T	Wärmeleitfähigkeit	2.5×10^{-2}	$\text{J m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$
Ko_m^n	Anzahl der m -Kombinationen aus n Elementen		1
l_∞	Grenzwert des Mischungswegs	100	m
l_μ	Mischungsweg		m
L_w	Massendichte der Tropfen / Flüssigwassergehalt		kg m^{-3}
L_c	Massendichte der Wolkentropfen / Wolkenwassergehalt		kg m^{-3}
L_r	Massendichte der Regentropfen / Regenwassergehalt		kg m^{-3}
L_g	Massendichte der Graupelpartikel		m^{-3}
L_i	Massendichte der Wolkeispartikel		m^{-3}
L_s	Massendichte der Schneeflocken		m^{-3}
L_{wd}	Umwandlungswärme Flüssigwasser-Wasserdampf	2.501×10^6	J kg^{-1}
L_{ed}	Umwandlungswärme Eis-Wasserdampf	2.834×10^6	J kg^{-1}
L_{ew}	Umwandlungswärme Flüssigwasser-Eis	0.333×10^6	J kg^{-1}
$L_{0,KS}$	Schwellenwert der Autokonversionsrate nach Kessler (1969)	0.5×10^{-3}	kg m^{-3}
M_w^k	k -tes Moment der Tropfenanzahldichteverteilung		$\text{kg}^k \text{m}^{-3}$
N_0	Koeffizient der Exponential-Verteilung		m^{-4}
N_f	Brunt-Väisälä-Frequenz		s^{-1}
N_c	Anzahldichte der Wolkentropfen		m^{-3}
N_r	Anzahldichte der Regentropfen		m^{-3}
N_g	Anzahldichte der Graupelpartikel		m^{-3}
N_i	Anzahldichte der Wolkeispartikel		m^{-3}
N_s	Anzahldichte der Schneeflocken		m^{-3}
N_w	Anzahldichte der Tropfen		m^{-3}
N_{ccn}	Anzahldichte der Kondensationskerne		m^{-3}
N_{Davies}	Davies-Zahl		1
N_{Fr}	Froude-Zahl		1
N_{Pr}	turbulente Prandtl-Zahl	1/3	1
N_{Re}	Reynolds-Zahl		1
N_{Sc}	Schmidt-Zahl	0.71	1
N_{We}	Weber-Zahl		1
NOA	Höhe des Niveaus ohne Auftrieb		m
NFK	Höhe des Niveaus freier Konvektion		m
\mathcal{N}	Normierungsfaktor		kg m^{-4}
p	Druck		Pa

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
p_{wd}	Sättigungsdampfdruck Flüssigwasser-Wasserdampf		Pa
p_{ed}	Sättigungsdampfdruck Eis-Wasserdampf		Pa
P	Bruchstückverteilungsfunktion		kg^{-1}
P_e	Geschwindigkeitsverteilungsfunktion		s m^{-1}
q	Radienverhältnis		1
q_d	Mischungsverhältnis Wasserdampf - trockene Luft		1
q_w	Mischungsverhältnis Flüssigwasser - trockene Luft		1
q_e	Mischungsverhältnis Eis - trockene Luft		1
q_{max}	maximales Mischungsverhältnis in der Grenzschicht		1
r	Partikelradius		m
r_d	relative Feuchte		1
R	Partikelradius		m
R_f	Gaskonstante feuchter Luft		$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
R_d	Gaskonstante von Wasserdampf	461.51	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
R_l	Gaskonstante trockener Luft	287.05	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
R_i	Bulk-Richardson-Zahl		1
S	Übersättigung über Wasser		1
S_i	Übersättigung über Eis		1
S	Strahlungsfluss		$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$
T	absolute Temperatur		K
T_3	Tripelpunkttemperatur von Wasser	273.15	K
T_{tr}	absolute Temperatur der Tropopause		K
t	Zeit		s
u_∞	maximale Windgeschwindigkeit des Grundstroms		m s^{-1}
u_0	horizontale Windgeschwindigkeit des Grundstroms		m s^{-1}
v	Sedimentationsgeschwindigkeit		m s^{-1}
v	Schwerpunktgeschwindigkeit		m s^{-1}
v_c	Sedimentationsgeschwindigkeit der Wolkentropfen		m s^{-1}
v_r	Sedimentationsgeschwindigkeit der Regentropfen		m s^{-1}
v_g	Sedimentationsgeschwindigkeit der Graupelpartikel		m s^{-1}
v_i	Sedimentationsgeschwindigkeit der Wolkeneispartikel		m s^{-1}
v_s	Sedimentationsgeschwindigkeit der Schneeflocken		m s^{-1}
$\bar{v}_{p,k}$	Sedimentationsgeschwindigkeit des k -ten-Moments		m s^{-1}
w	vertikale Windgeschwindigkeit		m s^{-1}
x	Partikelmasse		kg
x	horizontale Koordinate		m
x_d	Massenbruch von Wasserdampf		1
x^*	Trennmasse Wolkentropfen - Regentropfen	2.6×10^{-10}	kg
\bar{x}_c	mittlere Masse der Wolkentropfen		kg

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
\bar{x}_r	mittlere Masse der Regentropfen		kg
\bar{x}_g	mittlere Masse der Graupelpartikel		kg
\bar{x}_i	mittlere Masse der Wolkeneispartikel		kg
\bar{x}_s	mittlere Masse der Schneeflocken		kg
$\bar{x}_{c,min}$	minimale mittlere Masse der Wolkentropfen	4.2×10^{-15}	kg
$\bar{x}_{r,min}$	minimale mittlere Masse der Regentropfen	2.6×10^{-10}	kg
$\bar{x}_{g,min}$	minimale mittlere Masse der Graupelpartikel	2.6×10^{-10}	kg
$\bar{x}_{i,min}$	minimale mittlere Masse der Wolkeneispartikel	1.0×10^{-12}	kg
$\bar{x}_{s,min}$	minimale mittlere Masse der Schneeflocken	1.7×10^{-09}	kg
$\bar{x}_{c,max}$	maximale mittlere Masse der Wolkentropfen	2.6×10^{-10}	kg
$\bar{x}_{r,max}$	maximale mittlere Masse der Regentropfen	5.0×10^{-06}	kg
$\bar{x}_{g,max}$	maximale mittlere Masse der Graupelpartikel	5.0×10^{-04}	kg
$\bar{x}_{i,max}$	maximale mittlere Masse der Wolkeneispartikel	1.0×10^{-04}	kg
$\bar{x}_{s,max}$	maximale mittlere Masse der Schneeflocken	5.0×10^{-06}	kg
$x_{c,nuc}$	Masse der Wolkentropfen bei Nukleation	1.0×10^{-12}	kg
y	horizontale Koordinate		m
Y_c	Drittes Moment der Wolkentropfenanzahldichteverteilung		$\text{kg}^3 \text{m}^{-3}$
z	Vertikalkoordinate		m
z_{tr}	Höhe der Tropopause		m
Z_c	Zweites Moment der Wolkentropfenanzahldichteverteilung		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
Z_r	Zweites Moment der Regentropfenanzahldichteverteilung		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
Z_g	Zweites Moment der Anzahldichteverteilung für Graupel		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
Z_i	Zweites Moment der Anzahldichteverteilung für Wolkeneis		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
Z_s	Zweites Moment der Anzahldichteverteilung für Schnee		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
Z_w	Zweites Moment der Tropfenanzahldichteverteilung		$\text{kg}^2 \text{m}^{-3}$
\tilde{Z}_c	Radarreflektivitätsfaktor für Wolkentropfen		m^3
\tilde{Z}_r	Radarreflektivitätsfaktor für Regentropfen		m^3
\tilde{Z}_g	Äquivalenter Radarreflektivitätsfaktor für Graupel		m^3
\tilde{Z}_i	Äquivalenter Radarreflektivitätsfaktor für Wolkeneis		m^3
\tilde{Z}_s	Äquivalenter Radarreflektivitätsfaktor für Schnee		m^3
Z_{radar}	Äquivalenter Radarreflektivitätsfaktor		m^3

Lebenslauf

Name: Axel Seifert
Geburtsdatum: 31. Mai 1971
Geburtsort: Mutlangen (Ostalbkreis)
Familienstand: ledig

seit 05/1999 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Institut für Meteorologie und Klimaforschung,
Universität Karlsruhe / Forschungszentrum Karlsruhe

04/1998 - 04/1999 Zivildienst an der Landesanstalt für Umweltschutz
Baden-Württemberg in Karlsruhe

10/1992 - 03/1998 Studium der Meteorologie
an der Universität Karlsruhe (TH)

08/1990 - 06/1992 Technische Oberschule Stuttgart

02/1990 - 08/1990 Berufstätigkeit als Galvaniseur
bei der Degussa AG, Schwäbisch Gmünd

09/1987 - 01/1990 Berufsausbildung zum Galvaniseur
bei der Degussa AG, Schwäbisch Gmünd

08/1982 - 07/1987 Realschule Mutlangen

08/1977 - 07/1982 Grundschule Mutlangen

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Meteorologie und Klimaforschung des Forschungszentrums Karlsruhe und der Universität Karlsruhe durchgeführt. Die notwendigen Finanz- und Sachmittel wurden vom Forschungszentrum Karlsruhe zur Verfügung gestellt.

Mein Dank gilt in erster Linie Prof. Dr. Klaus D. Beheng, ohne dessen vielfältige Unterstützung diese Arbeit nicht denkbar gewesen wäre. Danken möchte ich ihm nicht nur für die gelungene Themenstellung, die genau meine Interessen und wohl auch Fähigkeiten getroffen hat oder für die konstruktive Kritik, mit der er mich durch die manchmal doch verwirrende Vielfalt der wolkenphysikalischen Prozesse geführt hat, sondern auch dafür, dass er, indem er mir die Teilnahme an zwei internationalen Konferenzen ermöglicht hat, dafür sorgte, dass meine Motivation für diese Arbeit immer auf hohem Niveau blieb. Unsere gemeinsame USA-Reise, die Teilnahme an der Konferenz in Reno / Nevada und nicht zuletzt die Wanderung auf den 'Half Dome' im Yosemite Nationalpark werden mir unvergesslich bleiben.

Prof. Dr. Ch. Kottmeier danke ich dafür, dass er trotz der Belastung durch die Messkampagne 'Vertikator' bereit war, das Korreferat für diese Arbeit zu übernehmen.

Danken möchte ich auch Priv. Doz. Dr. Ulrike Wacker für Diskussionen und Gespräche über Probleme der Wolkenphysik, ihre Geduld beim iterativen Schreiben einer gemeinsamen Veröffentlichung und zahlreiche Anregungen und Kommentare zur vorliegenden Arbeit.

Meinem Zimmerkollegen Uli Blahak gilt ein besonderer Dank für die gute Zusammenarbeit und seinen Sachverstand bei der Beurteilung meteorologischer Phänomene. Dr. Michael Baldauf und Jochen Förstner danke ich für die Unterstützung bei der Modellentwicklung und der Programmierfehlersuche. Danken möchte ich außerdem allen Institutsangehörigen, die mich auf irgendeine Art und Weise unterstützt haben, besonders genannt seien hier Gabi Klinck, Frank Mayer, Julia Schmöckel und Dr. Jan Handwerker.

Meiner Lebensgefährtin Melanie Haas danke ich für ihr Verständnis, ihre vielfältige Unterstützung und unermüdliches Korrekturlesen im Kampf gegen den Druckfehlerteufel.

